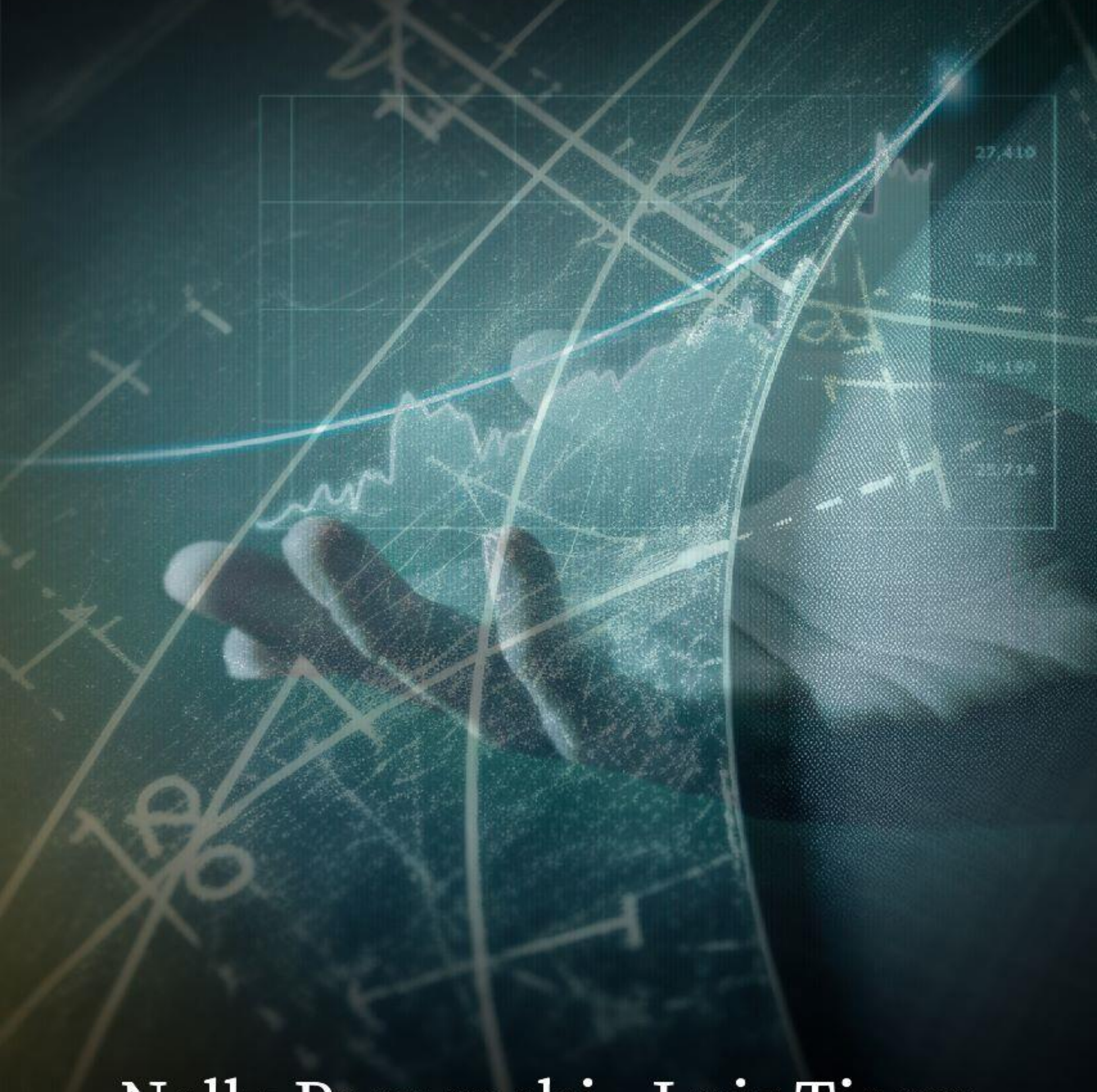
MATEMATICAS APLICADAS A LA ADMINISTRACION Y MERCADOTECNIA



Nelly Perugachi - Luis Tierra
Diego Almeida - Fabian Allauca

Matemáticas Aplicadas a la Administración y Mercadotecnia

Primera edición: Julio 2023
ISBN: 978-9942-7078-6-4
Este texto ha sido sometido
a evaluación de pares externos
con base en la normativa de la editorial.

Editor general: Antonio Poveda G.

Autores
Nelly Patricia Perugachi Cahueñas
patricia.perugachi@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-6331-9551

Luis Patricio Tierra Pérez.
patricio.tierra@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-3366-7867

Diego Marcelo Almeida López
dalmeida@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-5860-8308

Fabian Roberto Allauca Pancho
fabian.allauca@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-7668-3053

-Editorial-

CILADI

Centro de Investigación Latinoamericano para el Desarrollo e Innovación

PRÓLOGO

En el competitivo mundo empresarial de hoy en día, es fundamental contar con una sólida base matemática para tomar decisiones fundamentadas y enfrentar los desafíos que se presentan a diario. Este libro se ha creado con el objetivo de proporcionar una guía práctica y accesible que permita a los lectores comprender y aplicar conceptos matemáticos clave en contextos relacionados con la administración y la mercadotecnia.

El contenido de esta obra está estructurado de manera clara y progresiva para ser de gran utilidad para estudiantes, profesionales y empresarios que deseen potenciar sus habilidades matemáticas y aplicarlas en el ámbito de la administración y mercadotecnia. ¡Bienvenidos a este apasionante mundo de las matemáticas aplicadas!

INTRODUCCIÓN

La matemática es una ciencia puramente constructiva, que se nutre de requerimientos y necesidades de orden práctico. Es así como a partir de la sistematización y coherencia de los contenidos de la teoría de los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, reales), las funciones reales, y las matrices se construye la base para el desarrollo del análisis matemático. La teoría de los números está relacionada primordialmente con las propiedades de los números reales.

El estudio del Álgebra nos proporciona una de las mejores oportunidades en Matemática elemental para practicar el razonamiento lógico y riguroso, debe tratar de captar la importancia de las definiciones precisas y aplicarlas bajo los supuestos que se plantean.

Se ha tratado de cubrir los temas necesarios para las carreras de Administración de Empresas como también de Tecnologías de la Información, tratando de escoger los ejercicios que luego se piden resolver para desarrollar habilidades y destrezas con la finalidad de que trabaje en forma eficiente en este campo.

OBJETIVOS GENERALES

Formar profesionales en el área de Administración de Empresas, Contabilidad y Auditoría y TICs. Manteniendo gran capacidad de dirección, comunicación y toma de decisiones en un proceso Ético y Moral, demostrando creatividad, independencia profesional, en las empresas públicas y privadas.

Reforzar los conocimientos adquiridos por los alumnos en el bachillerato, incorporando nuevas tendencias pedagógicas de un aprendizaje activo y participativo de modo que el trabajo en grupo y la utilización adecuada de la Guía de Matemática permita al alumno estar en capacidad para:

Aplicar conceptos matemáticos en la resolución de problemas del mundo de los negocios y sistemas computarizados.

Desarrollar habilidades de pensamiento crítico empresarial, logrado al experimentar un auto aprendizaje en las áreas de administración, contabilidad y TICs

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Al finalizar el estudio de los contenidos de matemática básica el alumno será capaz de:

1. Aplicar las propiedades de los números reales en la solución de ejercicios
2. Realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas
3. Factorizar expresiones algebraicas
4. Resolver ejercicios de productos notables
5. Utilizar correctamente las propiedades de los exponentes y

los radicales

6. Resolver ecuaciones de grado uno o dos en una variable y dos variables, por varios métodos
7. Resolver sistemas de ecuaciones de dos y tres variables y realizar ejercicios de aplicación.
8. Resolver inecuaciones lineales o de grado superior a uno.
9. Diferenciar entre una relación y una función
10. Determinar el dominio y el condominio.
11. Demostrar cuando una función es invectiva, sobreyectiva y biyectiva
12. Utilizar las propiedades del álgebra de funciones
13. Construir gráficas de funciones, con las herramientas vistas anteriormente, especialmente de la teoría de polinomios antes de trazar las gráficas.
14. Utilizar las propiedades tanto de la función logarítmica como de las funciones exponenciales para resolver ejercicios como problemas que se presentan con este tipo de funciones.

GLOSARIO

Exponente. - Número que indica la potencia a la que hay que elevar una cantidad.

Números reales. - Es el conjunto formado por los números racionales e irracionales es el conjunto de los números reales, se designa por $\mathbb{R}$

Fracciones algebraicas. - Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios

Exponente de una potencia. - El **exponente** de una **potencia** indica el **número** de veces multiplicado por la base.

Factorizar o descomponer un número en factores primos es expresar el número como un producto de números primos.

Ecuaciones. - Una **ecuación** es una **igualdad** que se cumple para algunos valores de las letras.

Determinantes. - A cada **matriz cuadrada A** se le asocia un número denominado **determinante de A**.
El determinante de A se denota por |A| o por determinante (A).

Valor absoluto. - Valor absoluto de un número entero, es el **número natural** que resulta al **suprimir su signo**. Valor absoluto de un número real, se escribe **|a|**, es el **mismo número** a cuando es **positivo o cero**, y **opuesto** de a, si a es **negativo**.

Coordenadas cartesianas. - En un sistema de referencia ortonormal, a cada **punto P** del plano le corresponde un **vector** $\overrightarrow{OP}$.

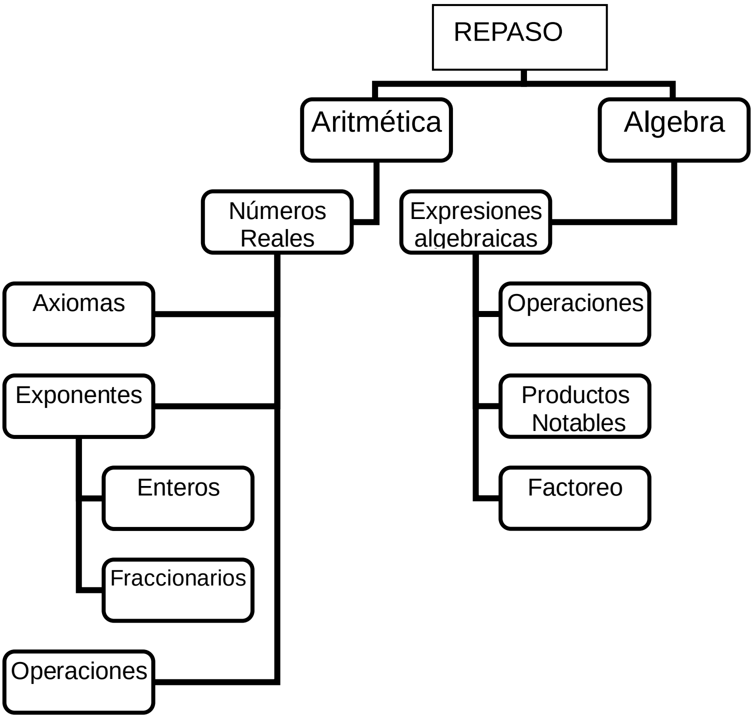
Pendiente de una recta. - La **pendiente** es la **inclinación** de la recta con respecto al eje de abscisas. Se denota con la letra **m**.

TABLA DE CONTENIDOS

UNIDAD 1

REPASO DE ALGEBRA

Esta unidad introduce conceptos aritméticos y algebraicos como un estudio organizado recordando y reforzando los temas estudiados para un mejor desarrollo en el Bachillerato



1.1. LOS NÚMEROS REALES

El sistema de los números reales es un conjunto de elementos denominada números reales y dos operaciones conocidas como adición y multiplicación. El conjunto de números reales es representado por ***R***. Un número real puede ser positivo, negativo, o cero y los números reales se clasifican en **racionales** e **irracionales.** Un número **racional** es cualquier número que se pueda expresar como $\frac{p}{q}; \quad p \neq o$, los números racionales son los enteros, fraccionarios, naturales, dígitos. Los números irracionales son aquellos que no se puede escribir como $\frac{p}{q}; \quad p \neq o$.

Si a y b son elementos del conjunto de ***R***, a+b designa la suma de a y de b, a·b o ab denota el producto. La operación de la sustracción se define con la ecuación $a-b=a+(-b)$, donde *–b* representa el negativo de *b*, tal que $a+(-b)=0$. La operación de la división se define con la ecuación $a \div b = a{\cdot}b^{-1}, donde b^{-1}$ representa el recíproco de *b* tal que $b{\cdot}b^{-1}=1$.

El sistema de números reales se puede describir completamente por un conjunto de axiomas (La palabra axioma se emplea para indicar un enunciado formal que se da por cierto sin necesidad de demostrar).

1.1.1. AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES

AXIOMA DE CERRADURA.- Cuando dos números reales se suman el resultado es otro número real, de manera similar, cuándo dos números reales se multiplican el resultado es otro numero real.

$$a,b \in R; \quad a+b=c; \; c \in R$$

$$a,b \in R; \quad a{\cdot}b=c; \quad c \in R$$

AXIOMA CONMUTATIVO.- Si a,b son dos números reales entonces:

$a+b=b+a \qquad y \qquad a\cdot b=b\cdot a$

AXIOMA ASOCIATIVO.- Sea a,b,c tres números reales cualesquiera entonces:

$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad (ab)c=a(bc)$

AXIOMA DISTRIBUTIVO.- Si a,b,c son números reales cualesquiera entonces:

$a(b+c)=ab+ac \qquad (b+c)a=bc+ca$

ELEMENTO IDENTIDAD.- Si a es un número real cualesquiera entonces:

$a+0=a \qquad a\cdot 1=a$

El 0 y el 1 son elementos identidad de la suma y de la multiplicación respectivamente

INVERSO.- Si a es un número real arbitrario, entonces existe un único número real denominado el negativo de a (denotado por -a) tal que:

$a+(-a)=0$

El inverso aditivo de 3 es -3, el inverso aditivo de -3 es -(-3) y es igual a 3, para cualquier número real a se cumple:

$-(-a)=a$

Si a es diferente de cero, entonces también existe un único número real denominado el recíproco de a (denotado por a^{-1})

tal que:
$a \cdot a^{-1} = 1$

El inverso multiplicativo de 3 es 3^{-1}, el inverso multiplicativo de 3^{-1} es $(3^{-1})^{-1}$, Este resultado puede generalizar para cualquier real a distinto de cero:

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

Ejemplo 1.1

Simplifique las expresiones siguientes:

a) $5-(-3) = 5+3 = 8$
b) $5(-3) = -(5 \cdot 3) = -15$
c) $(-3)(-5) = 15$
d) $(-2)(-x)(x+3) = 2x(`x+3) = 2x^2 + 6x$
e) $4x(x+y) - x^2 = 4x^2 + 4xy - x^2 = 3x^2 + 4xy$
f) $4[2(x+1)-3] = 4[2x+2-3] = 4[2x-1] = 8x-4$
g) $x[-3(-4+5)+3] = x[12-15+3] = x(0) = 0$
h) $(-2x)^{-1}(3x-1) = \dfrac{3x-1}{-2x} = \dfrac{1-3x}{2x}$

1.2. FRACCIONES

Una fracción se representa como $\dfrac{a}{b}$ y está definida como el producto de a y el inverso de b $\dfrac{a}{b} = ab^{-1} \qquad (b \neq 0)$

1.2.1. MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

El producto de las fracciones se obtiene multiplicando los numeradores y luego los denominadores

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$$

Ejemplo 1.2

$a)$ $$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 9}=\frac{10}{27}$$

$b)$ $$\left(\frac{2x}{3}\right)\left(\frac{4}{y}\right)=\frac{2x\cdot 4}{3\cdot y}=\frac{8x}{3y}$$

$c)$ $$\left(\frac{3x}{5}\right)\left(\frac{2y}{z}\right)=\frac{3x\cdot 2y}{5\cdot z}=\frac{6xy}{5z}$$

1.2.2. DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir una fracción entre otra, la segunda fracción se invierte y luego se multiplican las dos fracciones

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 1.3

$$a)\quad \left(\frac{2}{3}\right)\div\left(\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{10}{9}$$

$$b)\quad \left(\frac{3x}{5}\right)\div\left(\frac{5y}{2}\right)=\frac{3x}{5}\cdot\frac{2}{5y}=\frac{6x}{25y}$$

$$c)\quad \left(\frac{3}{2x}\right)\div 2y=\frac{3}{2x}\div\frac{2y}{1}=\frac{3}{2x}\cdot\frac{1}{2y}=\frac{3}{4xy}$$

1.2.3. CANCELACIÓN DE FACTORES COMUNES

El numerador y el denominador de una fracción se puede multiplicar o dividir por un mismo número real diferente de cero sin que el valor de la fracción se altere.

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}\qquad (c\neq 0)$$

La cancelación de fracciones se puede utilizar con el fin de reducirle la fracción a su más mínima expresión, Lo que significa dividir al numerador y al denominador por todos los factores comunes, este proceso se llama simplificación de fracciones.

Ejemplo 1.4

$$a)\quad \frac{15}{55}=\frac{3\cdot 5}{5\cdot 11}=\frac{3}{11}$$

$$a)\quad \frac{6x^2y}{15xy}=\frac{2\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot y}{3\cdot 5\cdot x\cdot y}=\frac{2x}{5}$$

$$c)\quad \frac{6x^2(x-2)}{3xy(x-2)}=\frac{2\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot(x-2)}{3\cdot x\cdot y\cdot(x-2)}=\frac{2x}{y}$$

1.2.4. ADICIÓN SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

Si las fracciones son homogéneas es decir tienen igual denominador, se suman los numeradores y se conserva los denominadores.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Ejemplo 1.5

$a)\quad \frac{7}{9}+\frac{1}{9}=\frac{7+1}{9}=\frac{8}{9}$

$b)\quad \frac{2}{3x}+\frac{4}{3x}=\frac{2+4}{3x}=\frac{6}{3x}=\frac{2}{x}$

$c)\quad \frac{5}{2y}-\frac{7}{2y}=\frac{5-7}{2y}=\frac{-2}{2y}=-\frac{1}{y}$

Cuando las fracciones son heterogénea, es decir tienen diferente denominador, primero se debe transformar a otras fracciones equivalentes con el mismo denominador y luego resolver como en el caso anterior.

Ejemplo 1.6

$a)\quad \frac{5}{6}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5+2}{6}=\frac{7}{6}$

$b)\quad \frac{1}{9x}-\frac{1}{18x}=\frac{1\cdot 2}{9x\cdot 2}-\frac{1}{18x}=\frac{2}{18x}-\frac{1}{18x}=\frac{2-1}{18x}=\frac{1}{18x}$

$c)\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

1.3. EXPONENTES

Los exponentes son los números que nos indican las veces que la base se repite como factor.

1.3.1. EXPONENTES ENTEROS

DEFINICIONES

1) $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \qquad (n\,veces\,a)$

2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$

3) $a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$

LEYES

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3) $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$

4) $\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Ejemplo 1.7

Simplifique los exponentes siguientes, no utilice paréntesis o exponentes negativos en la respuesta final.

$$a)\quad \left(\frac{1}{5}\right)^{3} \div 5^{-2} = \frac{1^{3}}{5^{3}} \div \frac{1}{5^{2}} = \frac{1}{125}\cdot\frac{25}{1} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$$

$$b)\quad \left(x^{2}yz\right)^{3}\left(xy\right)^{4} = x^{6}\cdot y^{3}\cdot z^{3}\cdot x^{4}\cdot y^{4} = x^{10}y^{7}z^{4}$$

$$c)\quad \left(a^{-2}+b^{-2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{b^{2}}\right)^{-1} = \left(\frac{b^{2}}{a^{2}b^{2}}+\frac{a^{2}}{a^{2}b^{2}}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{a^{2}+b^{2}}{a^{2}b^{2}}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a^{2}+b^{2}}{a^{2}b^{2}}} = \frac{a^{2}b^{2}}{a^{2}+b^{2}}$$

1.3.2. EXPENENTES FRACCIONARIOS

DEFINICIONES

$$1)\quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n} = a^{\left(1/n\right)n} = a^{1} = a \qquad si\, n\, es\, par\, a \geq 0$$

$$2)\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

$$3)\quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

LEYES

1) $$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

2) $$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

3) $$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$$

4) $$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$$

5) $$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

1) $$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

2) $$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

3) $$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$$

4) $$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$$

5) $$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

Ejemplo 1.8

Simplifique las expresiones siguientes:

$$a)\quad \frac{x^{9/4}}{x^4}=x^{9/4-4}=x^{-7/4}$$

$$b)\quad \left(1\frac{64}{225}\right)^{1/2}=\left(\frac{289}{225}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{289}{225}}=\frac{17}{15}=1\frac{2}{15}$$

$$c)\quad \frac{\sqrt{27}+\sqrt{75}}{2\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{25\cdot 3}}{2\sqrt{4\cdot 3}}=\frac{3\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{2\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=2$$

1.4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se llaman expresiones algebraicas al conjunto de letras y números, una expresión algebraica que contiene un solo término se llama monomio, las que contiene dos términos se llama binomio, las de tres términos se llama trinomio, en general se llaman polinomios a la expresión que contiene cualquier número de términos. Ejemplo:

Monomios: $3x^2$, $-6y$, $18xy$, $7y/5x$
Binomios: $2x^2-5x$, $-6x+2y$, $3+y$
Trinomios: $5x^2+2x-7$, $2x^3+5x^2-6/x$

1.5. OPERACIONES ALGEBRAICAS

Estudiaremos la manera de realizar las operaciones fundamentales con expresiones algebraicas, Tratando la adición algebraica como suma y resta de expresiones

1.5.1. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN EXPRESIONES

Sumar o restar dos o más expresiones algebraicas equivale a reducir términos semejantes, se llaman términos semejantes aquellos que tiene la misma parte literal.

Ejemplo 1.9

Efectuar las operaciones indicadas:

$a)\quad 4ab+3ab=(4+3)ab=7ab$

$b)\quad \left(3a^2+2ab+c\right)+\left(3c-4a^2-ab\right)$

$=3a^2+2ab+c+3c-4a^2-ab$

$=3a^2-4a^2+2ab-ab+c+3c=-a^2+ab+4c$

$c)\quad \left(4a^2-3b^2\right)-\left(7ab+b^2\right)-\left(5a^2+6ab+10b^2\right)$

$=4a^2-3b^2-7ab-b^2-5a^2-6ab-10b^2$

$=-a^2-14b^2-13ab$

1.5.2. MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES

Para multiplicar dos expresiones algebraicas se utiliza el axioma distributivo, cada elemento del primer paréntesis con cada elemento del segundo paréntesis dando los términos ordenados algebraicamente.

Ejemplo 1.10

$$a)\quad \left(\frac{2}{3}x^2y^3\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}a^2x^4y\right)=-\frac{6}{5}a^2x^6y^4=-\frac{2}{5}a^2x^6y^4$$

$b)\quad \left(a^2+2b\right)\left(3a^2+4b+1\right)\ aplicando\,axioma\ distributivo$

$$= a^2\left(3a^2 + 4b + 1\right) + 2b\left(3a^2 + 4b + 1\right) \; distributivo$$

$$= 3a^4 + 4a^2b + a^2 + 6a^2b + 8b^2 + 2b$$

$$= 3a^4 + 10a^2b + a^2 + 8b^2 + 2b$$

$c)$ $\quad (x+2)(x^2 - 5x)(x^2 + 1) = (x^3 - 5x^2 + 2x^2 - 10x)(x^2 + 1)$

$$= x^5 + x^3 - 5x^4 - 5x^2 + 2x^4 + 2x^2 - 10x^3 - 10x$$

$$= x^5 - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2 - 10x$$

1.5.2.1. PRODUCTOS NOTABLES

Existen algunos productos cuyos resultados se pueden determinar fácilmente, siguiendo ciertas reglas, estudiaremos los siguientes.

a) Cuadrado de la suma de dos términos

El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo, en símbolos:

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

b) Cuadrado de la diferencia de dos términos

El cuadrado de la diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo termino, en símbolos:

$$(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

c) Cubo de la suma o diferencia de dos términos

El cubo de una suma (diferencia) de dos términos es igual al cubo del primer término más (menos) el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo término, más (menos) el cubo del segundo término, en símbolos:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

d) Producto de una suma por una diferencia

El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término, en símbolos:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

e) Producto de la forma (x+a)(x+b)

El producto de **(x+a)(x+b)** es igual al cuadrado del primer término, más el primer término por la suma de los segundos términos, mas el producto de los segundos términos, en símbolos:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a \cdot b$$

Ejemplo 1.11
Desarrollar los productos notables:

$$a) \quad (x^n - y^n)^2 = (x^n)^2 - 2x^ny^n + (y^n)^2 = x^{2n} - 2x^ny^n + y^{2n}$$

$$b) \quad (2a+3b)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

$$c)\quad (2x-3y^2)(2x+3y^2)=(2x)^2-(3y^2)^2=4x^2-9y^4$$

$$d)\quad (x+2y)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3x\cdot(2y)^2+(2y)^3$$

$$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$$

$$e)\quad (x+3)(x-5)=x^2+(3-5)x-3\cdot 5=x^2-2x-15$$

$$f)\quad (x^2+3)(x^2+4)=(x^2)^2+(3+4)x^2+4\cdot 3=x^4+7x^2+12$$

1.5.2.2. FACTORIZACIÓN

Factorizar una expresión algebraica significa escribirle como un producto de factores. Trataremos ciertos métodos de factorización elementales y directos, y algunos teoremas menos usuales.

a) Factor Común

Cuándo todos los términos de una expresión algebraica tienen un factor común aplicamos la ley distributiva hacia atrás, en símbolos:

$$ab+ac=a(b+c)$$

Ejemplo 1.12

$$a)\quad 2x^3+6x^2-10=2(x^3+3x^2-5)$$

$$b)\quad x^4+x^2=x^2(x^2+1)$$

$$c)\quad ac+bc+ad+bd=(ac+bc)+(ad+bd)$$

$$=c(a+b)+d(a+b)=(a+b)(c+d)$$

b) Trinomio cuadrado perfecto

Una expresión algebraica es un cuadrado perfecto cuando es el producto de dos factores iguales.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\sqrt{x^2} \qquad\qquad \sqrt{a^2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$x \qquad \downarrow \qquad a$$

$$2 \cdot a \cdot x$$

Ejemplo 1.12

$a)\quad x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$

$b)\quad 4x^4 - 12x^2y + 9y^2 = (2x^2 - 3y)^2$

$c)\quad 9a^2 - 30ab^2 + 25b^4 = (3a - 5b^2)^2$

c) Diferencia de dos cuadrados

Es la operación inversa del producto notable de una suma por una diferencia de dos factores, lo que permite escribir a simple vista.

$$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$$

Ejemplo 1.13

$a)\quad a^2 - 16 = (a-4)(a+4)$

$b)\quad x^4 - 16y^4 = (x^2 + 4y^2)(x^2 - 4y^2)$

$\qquad\qquad = (x^2 + 4y^2)(x+2y)(x-2y)$

$c)\quad (4x-3)^2 - (2x+5)^2$

$\qquad = [(4x-3) + (2x+5)][(4x-3) - (2x+5)]$

$$= (4x-3+2x+5)(4x-3-2x-5) = (6x+2)(2x-8)$$
$$= 2(x+1)2(x-4) = 4(x+1)(x-4)$$

d) Completando cuadrado perfecto

El trinomio de la forma $a^4 + a^2b^2 + b^4$ no es un trinomio cuadrado perfecto, ya que aunque existe dos cuadrados perfectos, el tercer término no corresponde al doble producto de las raíces de los cuadrados, completamos con el término que hace falta de la siguiente manera:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + a^2b^2 + a^2b^2 - a^2b^2 + b^4$$
$$= \left(a^4 + 2a^2b^2 + b^4\right) - a^2b^2$$

La expresión que está dentro del paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto, por tanto:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = \left(a^4 + 2a^2b^2 + b^4\right) - a^2b^2$$
$$= \left(a^2 + b^2\right)^2 - a^2b^2$$
$$= \left(a^2 + b^2 + ab\right)\left(a^2 + b^2 - ab\right)$$

Ejemplo 1.14

$a)$ $16x^8 - 25x^4y^2 + 9y^4$

$$= 16x^8 - 25x^4y^2 + x^4y^2 + 9y^4 - x^4y^2$$
$$= 16x^8 - 24x^4y^2 + 9y^4 - x^4y^2 = \left(4x^4 - 3y^2\right) - x^4y^2$$
$$= \left(4x^4 - 3y^2 + x^2y\right)\left(4x^4 - 3y^2 - x^2y\right)$$

e) Factorización de expresiones de la forma $x^2 + bx + c$

El trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se factoriza abriendo dos paréntesis en cada paréntesis se pone la raíz cuadrada del primer término, los signos se baja el primer signo directamente en el primer paréntesis, se multiplica los signos del trinomio y se pone en el segundo paréntesis, y luego se encuentra dos números que multiplicados sea el término independiente de x, y que sumados o restados según el caso sea el coeficiente de x.

Ejemplo 1.15

$$
\begin{aligned}
a)\quad x^2 + 7x + 12 &= x^2 + (4+3)x + (4)(3) \\
&= (x+4)(x+3) \\
b)\quad x^2 + 3x - 10 &= x^2 + (5-2)x + (5)(-2) \\
&= (x+5)(x-2) \\
c)\quad x^2 - 2x - 24 &= x^2 + (-6+4)x + (-6)(4) \\
&= (x-6)(x+4)
\end{aligned}
$$

f) **Suma o diferencia de cubos**

La suma (diferencia) de cubos es igual al factor de la suma (diferencia) de las bases, multiplicado por el factor formado por el cuadrado de la base del primer término más (menos) la multiplicación de las dos bases, más el cuadrado de la segunda base. En símbolos:

$$
\begin{aligned}
(a^3 + b^3) &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
(a^3 - b^3) &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.16

$$a)\quad x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$$
$$b)\quad 8x^3 + 27 = (2x+3)(4x^2-6x+9)$$
$$c)\quad (2x+y)^3 + 8 = [(2x+y)+2][(2x+y)^2 - 2(2x+y)+4]$$

1.5.3. DIVISIÓN DE EXPRESIONES

Cuando se divide un polinomio por un binomio se puede utilizar la propiedad $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$ $\qquad c \neq 0$

Ejemplo 1.17

$$a)\quad \frac{2x^2+4x}{2x} = \frac{2x^2}{2x} + \frac{4x}{2x} = x+2$$
$$b)\quad \frac{2x^3-5x^2y+7x+3}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} - \frac{5x^2y}{x^2} + \frac{7x}{x^2} + \frac{3}{x^2}$$
$$= 2x - 5y + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}$$

Cuando queremos dividir una expresión algebraica entre un divisor que contiene más de un término, se debe utilizar la división extensa, en general tenemos:

$$\frac{Dividendo}{Divisor} = cociente + \frac{\mathrm{Re}\,siduo}{Divisor}$$

Ejemplo 1.18

Dividir:

$$6x^4+7x^3+12x^2+10x+1 \, entre \, 2x^2+x+4$$

$$\begin{array}{l|l}
6x^4+7x^3+12x^2+10x+1 & 2x^2+x+4 \\ \cline{2-2}
\underline{-6x^4-3x^3-12x^2} & 3x^2+2x-1 \\
4x^3+0x^2+10x+1 & \\
\underline{-4x^3-2x^2-8x} & \\
-2x^2+2x+1 & \\
\underline{+2x^2+\ x+4} & \\
3x+5 &
\end{array}$$

Se tiene como cociente $3x^2+2x-1$ y como resto $3x+5$

1.6. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una fracción algebraica es el cociente de dos expresiones algebraicas, ejemplos:

$$\frac{3x^2+4a}{x+1} \qquad \frac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[3]{x+7}}$$

1.6.1. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Existe un principio básico que nos permite simplificar, este principio dice que si dividimos al numerador y al denominador por una misma cantidad diferente de cero, el resultado es igual a la fracción dada.

Ejemplo 1.19

$$a)\quad \frac{4x^2+7x}{x^2}=\frac{x(4x+7)}{x\cdot x}=\frac{4x+7}{x}$$

$$b)\quad \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-1)}=\frac{x-2}{x-1}$$

$$c)\quad \frac{4x^2-20x+24}{6+10x-4x^2}=\frac{4(x^2-5x+6)}{-2(2x^2-5x-3)}$$

$$=\frac{4(x-3)(x-2)}{-2(2x+1)(x-3)}=-\frac{2(x-2)}{2x+1}$$

1.6.2. SUMA ALGEBRAICA DE FRACCIONES

Dos o más fracciones que tienen un común denominador se puede sumar o restar simplemente sumando o restando los numeradores y conservando el denominador, dando la respuesta simplificada.

Ejemplo 1.20

$$a)\quad \frac{2x+3}{x+1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{2x+3+x-1}{x+1}=\frac{3x+2}{x+1}$$

$$b)\quad \frac{2x+5}{x-1}-\frac{7}{x-1}=\frac{2x+5-7}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{(x-1)}=2$$

Cuando las fracciones que se suman o restan no tienen igual denominador, se procede a encontrar fracciones equivalentes, que tengan igual denominador y luego se procede como en el caso anterior, Para transformar a fracciones equivalentes se debe primero factorizar los denominadores, luego multiplicar todos los denominadores con el mayor exponente, es decir hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores (m.c.m).

Ejemplo 1.21

$$a)\quad \frac{2x-1}{x+3}+\frac{x^2}{3x-1}=\frac{(2x-1)(3x-1)}{(x+3)(3x-1)}+\frac{x^2(x+3)}{(3x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{(2x-1)(3x-1)+x^2(x+3)}{(x+3)(3x-1)}$$

$$=\frac{6x^2-2x-3x+1+x^3+3x^2}{(x+3)(3x-1)}$$

$$=\frac{x^3+9x^2-5x+1}{(x+3)(3x-1)}$$

$$b)\quad \frac{3x+4}{x^2-16}+\frac{x-3}{x^2+8x+16}=\frac{3x+4}{(x-4)(x+4)}+\frac{x-3}{(x+4)^2}$$

$$=\frac{(3x+4)(x+4)+(x-3)(x-4)}{(x-4)(x+4)^2}$$

$$=\frac{3x^2+12x+4x+16+x^2-4x-3x+12}{(x-4)(x+4)^2}$$

$$=\frac{4x^2+9x+28}{(x-4)(x+4)^2}$$

1.6.3. MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

Para multiplicar dos o más fracciones se multiplica los numeradores, y luego los denominadores obteniéndose una fracción la misma que hay que darle simplificada.

Ejemplo 1.21

$$a)\quad \frac{x^2-y^2}{4y}\cdot\frac{2y}{x+y}=\frac{(x-y)(x+y)}{4y}\cdot\frac{2y}{x+y}$$

$$=\frac{(x-y)(x+y)2y}{4y(x+y)}=\frac{x-y}{2}$$

$$b)\quad \frac{x^2-5x+6}{6x^2+18x+12}\cdot\frac{4x^2-16}{2x^2-5x-3}=\frac{(x-3)(x-2)}{6(x+2)(x+1)}\cdot\frac{4(x-2)(x+2)}{(2x+1)(x-3)}$$

$$\frac{2(x-2)(x-2)}{3(x+1)(2x+1)}=\frac{2(x-2)^2}{3(x+1)(2x+1)}$$

1.6.4. DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir una fracción a/b por otra fracción c/d, invertimos c/d y la multiplicamos por la primera.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Ejemplo 1.22

$$a)\quad \frac{2x+3}{x-1}\div\frac{x+3}{2x^2-2}=\frac{2x+3}{x-1}\cdot\frac{2(x^2-1)}{x+3}$$

$$=\frac{(2x+3)2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{2(2x+3)(x+1)}{x+3}$$

$$b)\quad \frac{\frac{3x-1}{x-2}}{x+1}=\frac{\frac{3x-1}{x-2}}{\frac{x+1}{1}}=\frac{3x-1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{3x-1}{(x-2)(x+1)}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS
Autoevaluación 1

1. Simplifique las expresiones siguientes:

   a) $\left(16x^{4}\right)^{\frac{3}{4}} =$

   b) $\left(\dfrac{27x^{3}}{64}\right)^{\frac{2}{3}} =$

   c) $\sqrt[3]{\dfrac{8a^{3}}{27b^{3}}} =$

2. En los siguientes ejercicios efectúe las operaciones indicadas y simplifique:

   c) [illegible]

   d) [illegible]

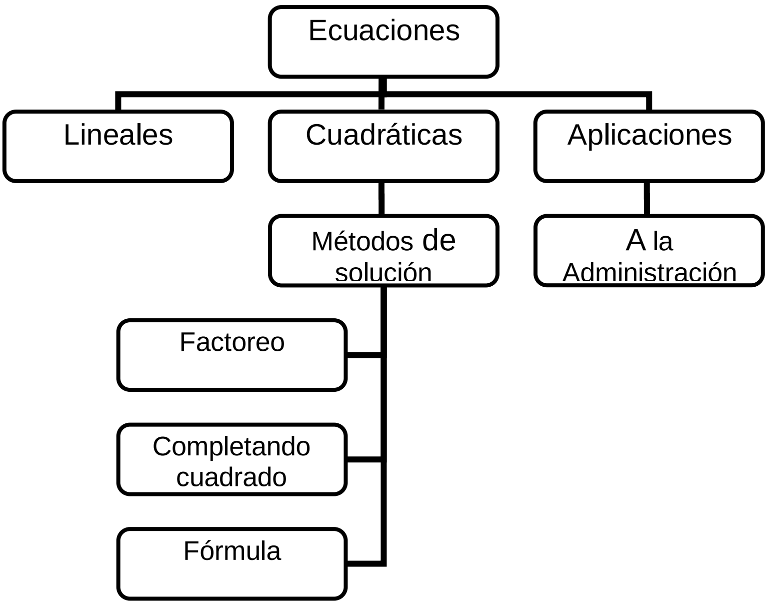
   e) $(a-2)(3a+4)=$

   i) $(2x+3y)^{2}=$

   j) $\left(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y\right)^{2}=$

UNIDAD 2
ECUACIONES DE UNA VARIABLE

Esta unidad refuerza los conocimientos de ecuaciones lineales y de ecuaciones cuadráticas y a la vez aplica en ejercicios relacionados con la administración de empresas.



2. ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad que contiene una o más cantidades desconocidas llamadas incógnitas. Ejemplos de ecuaciones:

$$2x+3=5x-1$$

$$y^2-5y=6-4y$$

$$2x+y=7$$

$$\frac{a}{1-r}=s$$

2.1. ECUACIONES LINEALES EN UNA VARIABLE

Una ecuación lineal de una variable tiene la forma $ax+b=0$, donde a,b son números reales y $a \neq 0$. Se llaman lineales porque el exponente de x es uno. Para la resolución de una ecuación se debe aplicar una serie de propiedades que permitan transformar la ecuación original en otra equivalente, estas propiedades son:

1) PROPIEDAD DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.- Se puede sumar o restar cualquier constante o expresión racional que contenga la variable a los dos lados de la ecuación.

2) PROPIEDAD DE MULTIPLICACIÓN O DIVISIÓN.- Se puede multiplicar o dividir a los dos lados de la ecuación por una constante diferente de cero.

Dos o más ecuaciones son equivalentes si y solamente si tiene el mismo conjunto solución.

Ejemplo 2.1

a) Resolver la ecuación:

$$x-3=2$$

Sumamos 3 a los dos lados de la ecuación

$$x-3+3=2+3$$

Después de simplificar resulta

$$x=5$$

b) Resolver la ecuación:

$$5x-3=2x+9$$

Sumamos 3 a cada lado

$$5x-3+3=2x+9+3$$

Reducimos los términos semejantes

5x=2x+12

Restamos 2x a cada lado

$$5x-2x=2x-2x+12$$

Reducimos, simplificamos

3x=12

Dividimos para 3 los dos lados de la ecuación

$$\frac{3x}{3}=\frac{12}{3}$$

Reducimos

$$x=4$$

Los ejemplos anteriores se resolvieron utilizando en forma rigurosa las propiedades, sin embargo estas dos propiedades dan cabida a ciertas reglas que son las que se utiliza en la práctica y que podemos resumir así:

Si está sumando pasa a restar, si está restando pasa a sumar; si está multiplicando pasa a dividir, si esta dividiendo pasa a multiplicar.

Ejemplo 2.2

Resolver las ecuaciones siguientes:

$$a)\quad \frac{9}{5}x+3=\frac{2}{3}-4x$$

$$\frac{9}{5}x+4x=\frac{2}{3}-3$$

$$\frac{9x+20x}{5}=\frac{2-9}{3}$$

$$\frac{29x}{5}=-\frac{7}{3}$$

$$29x\cdot 3=-7\cdot 5$$

$$87x=-35$$

$$x=-\frac{35}{87}$$

$$b)\quad \frac{5x}{3}-\frac{x-2}{4}=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{2x-1}{3}\right)$$

$$\frac{5x}{3}-\frac{x-2}{4}=\frac{9}{4}-\frac{x}{2}+\frac{2x-1}{6}$$

$$12\left(\frac{5x}{3}\right)-12\left(\frac{x-2}{4}\right)=12\left(\frac{9}{4}\right)-12\left(\frac{x}{2}\right)+12\left(\frac{2x-1}{6}\right)$$

$$4(5x)-3(x-2)=3(9)-6\cdot x+2(2x-1)$$

$$20x-3x+6=27-6x+4x-2$$

$$20x-3x+6x-4x=27-2-6$$

$$19x=19$$

$$x=1$$

2.2 ECUACIONES CUADRÁTICAS EN UNA VARIABLE

Una ecuación de segundo grado o cuadrática es aquella que adopta la forma $ax^2 + bx + c = 0$; donde a,b,c son constantes. Ejemplo de ecuaciones cuadráticas:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$(2x+1)^2 = x\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Para resolver ecuaciones cuadráticas se utilizan varios métodos; aquí estudiaremos los siguientes:

2.2.1. Solución ecuaciones cuadráticas por factoreo

Este método consiste en factorizar el trinomio de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, es decir escribir el trinomio como el producto de dos factores lineales, dado que este producto está igualado a cero, cada factor, significa que es cero, se resuelve las ecuaciones lineales, obteniéndose dos soluciones o raíces.

Ejemplo 2.3

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas por factoreo:

a) $x^2 + 10x + 16 = 0$

$$(x+8)(x+2) = 0$$
$$x + 8 = 0 \qquad\qquad x + 2 = 0$$
$$x = -8 \qquad\qquad x = -2$$

b) $x^2 - 25 = 0$

$$(x+5)(x-5)=0$$

$$x+5=0 \qquad\qquad x-5=0$$

$$x=-5 \qquad\qquad x=5$$

c) $\sqrt{3x-5}=x+1$

Elevamos al cuadrado los dos lados de la ecuación para poder eliminar el radical

$$\left(\sqrt{3x-5}\right)^2=(x+1)^2$$

$$3x-5=x^2+2x+1$$

$$-x^2-2x+3x-5-1=0$$

$$-x^2+x-6=0$$

$$x^2-x+6=0$$

$$(x-3)(x+2)=0$$

$$x-3=0 \qquad\qquad x+2=0$$

$$x=3 \qquad\qquad x=-2$$

2.2.2. Solución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Para resolver por este método la ecuación cuadrática, se debe primero dividir a toda la ecuación entre el coeficiente de x^2, pasamos el término independiente de x al segundo miembro, sumamos k^2 a los dos miembros de la ecuación, en donde k es la mitad del coeficiente de x, el lado izquierdo de la ecuación se ha formado un trinomio cuadrado perfecto $(x+k)^2$, de modo que la solución se obtiene extrayendo la raíz cuadrada a ambos lados.

Ejemplo 2.4

Resolver las ecuaciones siguientes completando el cuadrado:

$a)\quad x^2+6x+8=0$

$$x^2+6x \quad = -8$$

$$x^2+6x+9=-8+9$$

$$(x+3)^2=1$$

$$(x+3)=\pm\sqrt{1}$$

$$(x+3)=\pm 1$$

$$x=-3\pm 1$$

$$x=-3+1 \qquad\qquad x=-3-1$$

$$x=-2 \qquad\qquad x=-4$$

$b)\quad 2x^2-x-2=0$

$$x^2-\frac{1}{2}x-1=0$$

$$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=1+\frac{1}{16}$$

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$$

$$x-\frac{1}{4}=\pm\sqrt{\frac{17}{16}}$$

$$x=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$$

2.2.3. Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ y aplicando el método anterior tendríamos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se denomina fórmula para la resolución de ecuaciones cuadráticas, en las cuales los valores a, b, c, son los coeficientes de x^2, de x, y el término independiente de x.

Ejemplo 2.5

Resolver las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula:

$a) \quad 6x^2 + 7x + 1 = 0$

Comparando ésta ecuación con la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$ encontramos que a=6, b=7, c=1, entonces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{12}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{12}$$

$$x = \frac{-7 \pm 5}{12}$$

$$x = \frac{-7 + 5}{12} \qquad x = \frac{-7 - 5}{12}$$

$$x = \frac{-2}{12} \qquad x = \frac{-12}{12}$$

$$x = \frac{-1}{6} \qquad x = -1$$

$b) \quad x^2 - 2x - 48 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-48)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2 + 192}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 14}{2}$$

$$x = \frac{2 + 14}{2} \qquad x = \frac{2 - 14}{2}$$

$$x = \frac{16}{2} \qquad x = \frac{-12}{2}$$

$$x = 8 \qquad x = -6$$

2.2.4. Casos especiales de ecuaciones cuadráticas

No siempre las ecuaciones se presentan en su forma general, en algunas ocasiones contienen fracciones, radicales, las mismas que deben ser transformadas en otras equivalentes mediante las propiedades de ecuaciones.

Ejemplo 2.6
Resolver las siguientes ecuaciones por cualquier método:

$a)$ $$\frac{x}{x+2} - \frac{4}{x+1} = \frac{-2}{x+2}$$

$$\frac{x(+1) - 4(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{-2}{x+2}$$

$$\frac{x^2 + x - 4x - 8}{(x+2)(x+1)} = \frac{-2}{x+2}$$

$$x^2 - 3x - 8 = \frac{-2(x+2)(x+1)}{(x+2)}$$

$$x^2 - 3x - 8 = -2x - 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -2$$

$b)\quad 2\sqrt{x+4} - x = 1$

$$2\sqrt{x+4} = 1 + x$$

$$\left(2\sqrt{x+4}\right)^2 = (1+x)^2$$

$$4(x+4) = 1 + 2x + x^2$$

$$4x + 16 = 1 + 2x + x^2$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x-5)(x+3) = 0$$

$$x = 5 \qquad x = -3$$

$c)\quad \sqrt{x+13} - \sqrt{7-x} = 2$

$$\sqrt{x+13} = 2 + \sqrt{7-x}$$

Para suprimir el radical elevamos ambos miembros al cuadrado

$$\left(\sqrt{x+13}\right)^2 = \left(2 + \sqrt{7-x}\right)^2$$

$$x + 13 = 4 + 4\sqrt{7-x} + 7 - x$$

ordenamos

$$2x + 2 = 4\sqrt{7-x}$$

Elevamos los dos lados de a ecuación nuevamente al cuadrado.

$$(2x+2)^2 = \left(4\sqrt{7-x}\right)^2$$

$$2x^2 + 8x + 4 = 16(7-x)$$

$$4x^2 + 8x + 4 = 112 - 16x$$

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

Luego factorizamos

$$(x-3)(x+9) = 0$$

$x = 3 \qquad x = -9$

2.3. APLICACIONES DE ECUACIONES

Aprender a solucionar ecuaciones como las que hemos estudiado tiene sentido si aplicamos para la resolución de problemas, no hay una regla general para la resolución de problemas pero mencionaremos algunos pasos que ayudarán en la resolución.

Paso 1. Leer detenidamente la situación que plantea el problema hasta familiarizarse con ella.

Paso 2. Hacer una lista de datos conocidos y otra de los datos que se quieren determinar

Paso 3. Representar el término desconocido por medio de una variable, por ejemplo x, y expresar todas las demás cantidades en términos de x si es posible.

Paso 4. Expresar la situación descrita en el problema en símbolos matemáticos, es decir plantear la o las ecuaciones.

Paso 5. Resolver las ecuaciones y comprobar si la situación hallada se ajusta a la situación descrita en el problema.

2.3.1. APLICACIÓN DE ECUACIONES EN LA ADMINISTRACIÓN

Para solucionar problemas en el campo empresarial se debe conocer algunas relaciones importantes, estas son:

a) El ingreso *I*, obtenido al vender x artículos a *p* pesos es: $I = xp$

b) El costo total es igual al costo variable más el costo fijo

$$CT = CV + CF$$

Donde, el costo variable depende del número de artículos que se produzcan (mano de obra, materia prima), mientras que los costos fijos permanecen constantes, independientemente de las unidades producidas (arriendo, salarios, etc.)

c) La utilidad, es la diferencia entre los ingresos totales recibidos I y los costos totales causados C

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

Ejemplo 2.7

Una vendedora gana un salario base de 600 \$ por mes más una comisión del 10% de las ventas que haga. Descubre que en promedio le toma $1\frac{1}{2}$ horas realizar ventas por un valor de \$ 100. ¿Cuántas horas deberá trabajar en promedio cada mes para que sus ingresos sean de \$ 2 000?

SOLUCIÓN:

Supongamos que trabaja x horas por mes, cada 3/2 horas efectúa ventas por \$ 100 de modo que al aplicar una regla de tres tendríamos:

$$\tfrac{3}{2}\, horas\, vende\, 100\ dólares$$

$$1\, hora \qquad\qquad X = \frac{1 hora \cdot 100\,\$}{\tfrac{3}{2}\, horas} = \frac{200}{3}\, dólares\, en\, ventas$$ po

r hora, como su comisión es del 10% de este valor tendríamos de $0{,}10 \cdot \left(\frac{200}{3}\right) = \frac{20}{3}$ dólares de comisión por hora, Por lo tanto la comisión en un mes es de $\frac{20x}{3}\, dólares$, Agregando su salario base obtenemos un ingreso mensual total de $600+\frac{20x}{3}$ esto debe ser igual a 2000, de modo que obtenemos la ecuación.

$$600+\frac{20x}{3}=2000$$
$$\frac{20x}{3}=2000-600$$
$$\frac{20x}{3}=1400$$
$$x=\frac{3\cdot 1400}{20}$$
$$x=210$$

La vendedora deberá trabajar 210 horas por mes, en promedio, si desea alcanzar el nivel de ingresos deseado.

Ejemplo 2.8

El costo para producir un par de zapatos es de \$ 5 700 y depende de la materia prima y de la mano de obra, Si el costo de la materia prima es el triple del costo de la mano de obra, ¿Cuál es el costo de la materia prima y de la mano de obra?

SOLUCIÓN:

Si el costo de la materia prima es: x
Entonces el costo de la mano de obra es: 3x

Luego, $x+3x=5700$

$$4x=5700$$

$$x = \frac{5700}{4}$$

$x = 1425$ costo de la mano de obra

Costo de la materia prima es: $3x = 3(1425) = 4275$

Ejemplo 2.9

En un almacén de calzado hay 500 pares de zapatos de dos marcas diferentes, cuyos precios son $ 8 000 y $ 13 500, la venta de los 500 pares produjo ingresos de $ 4 962 500, ¿Cuántos pares de zapatos de cada marca se vendieron?

SOLUCIÓN:

Valor de c/u	# de pares	Valor Total
8 000	x	8 000 · x
13 500	500-x	13 500(500-x)

$$4962500 = 8000x + 13500(500 - x)$$

$$4962500 = 8000x + 6750000 - 13500x$$

$$5500x = 1787500$$

$$x = \frac{1787500}{5500}$$

$$x = 325$$

Luego los pares de zapatos vendidos a $8000 son 325 y los vendidos a 13500 son 175

Ejemplo 2.10

Un fabricante produce lámparas, que vende a $ 8200 sus costos de producción son los siguientes: $ 130000 en arriendo, y $ 3500 por el material y la mano de obra de cada lámpara producida. ¿Cuántas lámparas debe producir para obtener utilidades de $ 246000.

SOLUCIÓN:

Número de lámparas: x
Costo de producción: $CT = 3500x + 130000$
Ingreso por ventas $I = 8200x$

Utilidad

$$U(x) = 8200x - (3500x + 130000)$$

$$U(x) = 8200x - 3500x - 130000$$

Como su utilidad quiere que sea de 246000 dólares

$$246000 = 4700x - 130000$$

$$246000 + 130000 = 4700x$$

X=80

Luego debe producir 80 lámparas para obtener una utilidad de $ 246000

La tragedia y la comedia no son separables, allí radica la forma exterior de vida.

EJERCICIOS PROPUESTOS
Autoevaluación 2

1. Resuelva las ecuaciones siguientes:

a) $3(2-4x)-5=5-(x-2)$

b) $\frac{1}{3}(3y+1)+\frac{1}{2}y=\frac{2}{5}(1-3y)-4$

2. Reduzca las ecuaciones siguientes a ecuaciones lineales y resuélvalas:

a) [illegible]

3. Resuelva las siguientes ecuaciones por factorización:

a) $x^2+4x+4=0$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones por la fórmula cuadrática:

a) $(x+1)^2=2(x-1)$

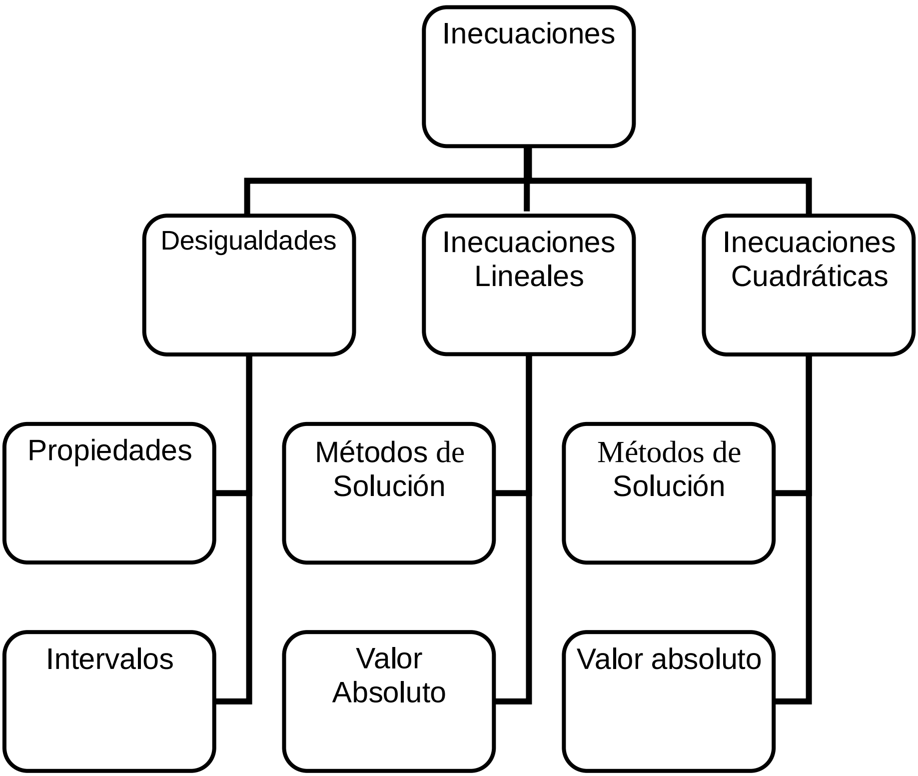
5. Resuelva las siguientes ecuaciones completando el cuadrado:

a) $4x^2-8x+3=0$

b) $7x-(3x^2-5)=x^2$

U N I D A D 3
DESIGUALDADES E INECUACIONES

El estudio de las inecuaciones es importante para la decisión de producción de un artículo, pudiendo ser inecuaciones lineales o de grado superior, con o sin intervalos



3.1. DESIGUALDADES

Una desigualdad es la expresión que índica, que una cantidad es mayor o menor que otra. Indicaremos el significado de los signos de las desigualdades

a) $a \succ b$ significa que a es mayor que b, o bien que $a - b$ es un número positivo

b) $a \prec b$ significa que a es menor que b, o que $a - b$ es un número negativo

c) $a \geq b$ significa que a es mayor o igual que b

d) $a \leq b$ significa que a es menor o igual que b

e) $a \prec x \prec b$ significa que x es mayor que a pero menor que b

3.1.1 PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

1) Si a los dos miembros de una desigualdad se le suma o resta una misma cantidad, el sentido de la desigualdad se mantiene, en símbolos:

Si $a \prec b\ entonces, a + c \prec b + c$

Si $a \succ b\ entonces,\ a - c \succ b - c$

Si $5 \leq 7\ entonces,\ 5 + 3 \leq 7 + 3$

2) Si se multiplican o dividen a los dos miembros de una desigualdad por una misma cantidad positiva, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido, en símbolos:

Si $a \prec b\ y\ c \succ 0, entonces,\ a \cdot c \prec b \cdot c$

Si $a \succ b\ \ y\ \ c \succ 0,\ entonces, \dfrac{a}{c} \succ \dfrac{b}{c}$

Si $2 \leq 5\ \ y\ \ 4 \succ 0,\ \ entonces,\ 2 \cdot 4 \leq 5 \cdot 4$

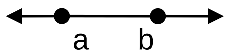
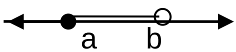
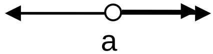
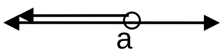
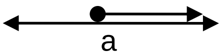
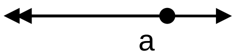
3) Si multiplicamos o dividimos a ambos miembros por una misma cantidad **negativa**, la desigualdad **cambia de sentido,** en símbolos:

Si $a \geq b \ y \ c \prec 0, \ \ entonces \ a \cdot c \leq b \cdot c$

Si $a \leq b \ y \ c \prec 0, \ entonces \ \dfrac{a}{c} \geq \dfrac{b}{c}$

Si $8 \prec 10 \ \ y \ -2 \prec 0, \ \ entonces \ 8 \cdot (-2) \succ 10 \cdot (-2)$

3.1.2. INTERVALOS

Notación Gráfica	Notación de conjuntos	Notación de intervalos
	$a \leq x \leq b$	$[a,b]$
	$a \prec x \prec b$	$]a,b[$
	$a \prec x \leq b$	$]a,b]$
	$a \leq x \prec b$	$[a,b[$
	$x \succ a$	$]a,+\infty[$
	$x \prec a$	$]-\infty,a[$
	$x \geq a$	$[a,\infty[$
	$x \leq a$	$]-\infty,a]$
	$x \in R$ $todo x$	$]-\infty,+\infty[$

3.2. INECUACIONES LINEALES

Una inecuación es una desigualdad que contiene cantidades desconocidas, llamadas incógnitas, y tienen la forma $ax+b \geq c$, y en general todas las desigualdades donde la variable es lineal se llaman inecuaciones lineales.
Para resolver inecuaciones lineales utilizaremos las propiedades e las desigualdades.

Ejemplo 3.1

Resuelva la desigualdad $3x+5 \prec x-7$

$$3x+5 \prec x-7$$
$$3x-x \prec -7-5$$
$$2x \prec -12$$
$$x \prec \frac{-12}{2}$$
$$x \prec -6$$

La solución en forma de intervalos será $]-\infty,-6[$

Ejemplo 3.2

Resuelva la desigualdad $x+8 \geq 5x-12$

$$x+8 \geq 5x-12$$
$$x-5x \geq -12-8$$
$-4x \geq -20$ (como $-4 \prec 0$ entonces)
$x \leq \frac{-20}{-4}$ (cambia de sentido)
$$x \leq 5$$
La solución en forma de intervalos será $]-\infty,5]$

Ejemplo 3.3

Resuelva la inecuación $\frac{3(x+4)}{2} \geq 2 - \frac{1-4x}{5}$

$$\frac{3x+12}{2} \geq \frac{10-(1-4x)}{5}$$
$$5(3x+12) \geq 2(10-1+4x)$$
$$15+60x \geq 20-2+8x$$
$$60x-8x \geq 20-2-15$$
$$52x \geq 3$$
$$x \geq \frac{3}{52}$$

La solución en forma de intervalos será $\left[\frac{3}{52}, +\infty\right[$

Ejemplo 3.4

El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce al precio de \$ 60 cada artículo, gasta \$ 40 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo y tiene gastos adicionales (fijos) de \$ 3000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos \$ 1000 a la semana.

SOLUCIÓN:

Número de artículos producidos y vendidos a la semana: x
Costo de producir es = $40x+3000$
Ingresos obtenidos por vender = $60x$
Por tanto; Utilidad = Ingresos - Costos

$$Utilidad = 60x-(40x+3000))$$
$$60x-40x-3000 \geq 1000$$

$$20x - 3000 \geq 1000$$
$$20x \geq 4000$$
$$x \geq 2000$$

Por lo tanto el fabricante deberá producir y vender por lo menos 2000 artículos.

3.3. INECUACIONES CUADRÁTICAS DE UNA VARIABLE

Las inecuaciones cuadráticas de una variable son de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0 \ (o\,bien \leq)$, en donde a,b,c son constantes. Una inecuación cuadrática se puede resolver escribiendo como el producto de dos factores, utilizaremos los siguientes métodos:

a) Método analítico

Para resolver una desigualdad cuadrática se utiliza la propiedad del producto diferente de cero de dos números reales.

Un producto es mayor que cero si y solo si ambos factores son mayores que cero, o ambos factores son menores que cero, en símbolos:

$$a \cdot b \geq 0\, si\ y\, solo\, si \begin{cases} a \geq 0 \ \wedge \ b \geq 0 \\ \qquad 0 \\ a \leq 0 \ \wedge \ b \leq 0 \end{cases}$$

Un producto es menor que cero si y solo si el un factor es mayor que cero y el otro factor es menor que cero (viceversa), en símbolos:

$$a \cdot b \leq 0 \ si \ \ y \ \ solo\, si \begin{cases} a \geq 0 \ \ \wedge \ \ b \leq 0 \\ \qquad o \\ a \leq 0 \ \ \wedge \ \ b \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3.5

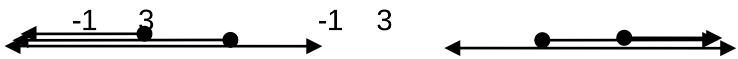
Resolver la inecuación $x^2 - 2x \geq 3$ por el método analítico

$$x^2 - 2x \geq 3$$
$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$
$$(x-3)(x+1) \geq 0$$

Ambos menores que cero o ambos mayores que cero

$$x - 3 \leq 0 \;\; y \;\; x + 1 \leq 0 \qquad obien \qquad x - 3 \geq 0 \;\; y \;\; x + 1 \geq 0$$
$$x \leq 3 \quad \cap \quad x \leq -1 \qquad \cup \qquad x \geq 3 \quad \cap \quad x \geq -1$$

Los números que satisfacen ambas condiciones satisfacen la desigualdad son.



$$x \leq -1 \qquad\qquad \cup \qquad\qquad x \geq 3$$
$$]-\infty, -1] \qquad \cup \qquad [3, +\infty[$$

Ejemplo 3.6

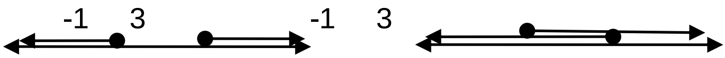
Resolver la inecuación $x^2 - 2x \leq 3$ por el método analítico

$$x^2 - 2x \leq 3$$
$$x^2 - 2x - 3 \leq 0$$
$$(x-3)(x+1) \leq 0$$

El primero mayor que cero o el primero menor a cero
y el segundo menor a cero   y el segundo mayor cero

$$x - 3 \geq 0 \;\; y \;\; x + 1 \leq 0 \qquad obien \qquad x - 3 \leq 0 \;\; y \;\; x + 1 \geq 0$$
$$x \geq 3 \quad \cap \quad x \leq -1 \qquad \cup \qquad x \leq 3 \quad \cap \quad x \geq -1$$

Los números que satisfacen ambas condiciones satisfacen la desigualdad son:



En este primer lado no
Existe solución porque
No se cortan las dos rectas

$-1 \leq x \leq 3$
$[-1,3]$
esta es la solución

b) Método por intervalos

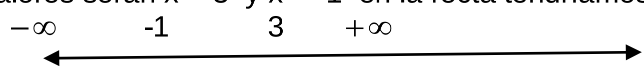
Utilizando este método obtenemos aquellos valores donde cada uno de los factores que conforman la inecuación es igual a cero, estos valores serán ordenados en la recta numérica, luego se toma arbitrariamente cualquier valor del intervalo que corresponde a los valores en la recta numérica y se reemplaza en la inecuación, el signo obtenido se escribe en el intervalo seleccionado, y a partir de este se intercalan los signos, la solución son los intervalos positivos si la inecuación es mayor que cero, o son los intervalos negativos si la ecuación es menor que cero.

Ejemplo 3.7

Resolver la inecuación $x^2 - 2x \geq 3$ por el método de intervalos

$$x^2 - 2x \geq 3$$
$$(x-3)(x+1) \geq 0$$

Los valores serán x = 3 y x = -1 en la recta tendríamos:



$(x-3)(x+1)$	+	-	+

Utilicemos en el intervalo $]-\infty,-1]$ el número -3 y reemplacemos en $(x-3)(x+1)$ obtenemos + 12 esto quiere decir que todo este intervalo es positivo y los otros intervalos están alternados sus signos.

Como queremos solucionar $(x-3)(x+1)\geq 0$ entonces la solución es la unión de intervalos de signo positivo, luego el conjunto solución es: $]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$

$$x \leq -1 \cup x \geq 3$$

Ejemplo 3.8

Resolver la inecuación $\dfrac{(x-2)(1-x)}{2x+5}\leq 0$ por el método de intervalos

Como las leyes de los signos son iguales tanto para e producto como para el cociente, el método para resolver inecuaciones que involucren cocientes es exactamente igual al método para resolver inecuaciones con productos, salvo que se debe tener cuidado de excluir de la respuesta los valores que hagan al denominador cero.

Entonces: $x=2 \quad x=1 \quad x=-5/2$

Luego al reemplazar x por cero en el intervalo [-5/2, 1] obtenemos un número negativo y alternando los signos obtenemos:

	$-\infty$ $\quad -5/2$	1	2	$+\infty$
$\dfrac{(x-2)(1-x)}{(2x+5)}$	+	-	+	-

Por lo tanto la solución es $]-\infty,-5/2[\cup[1,2]$ observe que se excluyo de la solución el -5/2, porque este valor hace cero al denominado.

3.4. INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Si x es un número real, entonces el valor absoluto de x se denota por $|x|$ y está definido por:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \prec 0 \end{cases}$$

Por ejemplo:

$|5| = 5$ $\qquad$ $|-3| = 3$ $\qquad$ $|-7| = 7$

De la definición se deduce que el valor absoluto de un número es siempre un número real no negativo. $|a| = |-a|$

Para resolver ecuaciones con valor absoluto se utiliza la siguiente regla.

Si $|a| = c,\ donde\ c \geq 0,\ entonces\ a = c\ o\ bien\ a = -c$

Ejemplo 3.9

Resolver $|2x-3| = 5$

De acuerdo con la definición dada de valor absoluto, la ecuación dada se satisface si:

$$\begin{array}{lll} 2x-3=5 & o\ bien & 2x-3=-5 \\ 2x=8 & & 2x=-2 \\ x=4 & & x=-1 \end{array}$$

Por lo tanto la solución es $x = 4\ \ y\ \ x = -1$

Ejemplo 3.10

Resuelva $|3x-2| = |2x+7|$

La ecuación se satisface si:

$$3x-2=2x+7 \qquad o\ bien \qquad 3x-2=-(2x+7)$$

$$3x-2x=7+2 \qquad\qquad 3x+2x=-7+2$$

$$x=9 \qquad\qquad x=1$$

Por lo tanto la solución es $x=9 \ \ y \ \ x=1$

3.4.1 TEOREMA DE INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

La desigualdad $|x|\prec a$ indica que la distancia entre x y el origen es menor que a unidades, dado que x puede estar a la derecha como a la izquierda del origen, x está entre a y -a en símbolos tendríamos:

$$|x|\prec a \ si \ y \ solo \ si \ -a\prec x\prec a$$

De manera similar para $|x|\succ a$ significa que x está a más de a unidades del origen a la derecha como a la izquierda, es decir $x\prec -a \ \ o \ \ x\succ a$, en símbolos tendríamos:

$$|x|\succ a \ \ si \ y \ solo \ si \ \ x\succ a \ \ o\ bien \ \ x\prec -a$$

Ejemplo: 3.11

Resuelva $|2x-3|-5\leq 0$ la desigualdad se puede escribir como $|2x-3|\leq 5$ del teorema anterior se tiene:

$$-5\leq 2x-3\leq 5$$

$$-5+3\leq 2x\leq 5+3$$

$$\frac{-2}{2}\leq x\leq \frac{8}{2}$$

$-1\leq x\leq 4$ esta es la solución

En intervalos tendríamos $[-1,4]$

Ejemplo 3.12

Resuelva $|3x-13|-6\geq 0$ la desigualdad se puede escribir como $|3x-13|\geq 6$ del teorema anterior se tiene:

$$\begin{array}{ll} 3x-13\leq -6 \quad o\ \ bien & 3x-13\geq 6 \\ 3x\leq 7 & 3x\geq 18 \\ x\leq 7/3 & x\geq 6 \end{array}$$

En intervalos $]-\infty,7/3] \quad \cup \quad [6,+\infty[$

Solo aquellos que conocen el lado malo de las cosas pueden valorizar la bondad y ser buenos, en cambio en los casi buenos, sus maldades son imperdonables.

EJERCICIOS PROPUESTOS
Autoevaluación 3

1. Resuelva las desigualdades siguientes:

a) [illegible]

b) [illegible]

3. Una empresa automotriz desea saber si le conviene fabricar sus propias correas para el ventilador, que ha estado adquiriendo de proveedores externos a $ 2,50 cada unidad, la fabricación de las correas por la empresa incrementará sus costos fijos en $ 1500 al mes, pero solo le costará fabricar $ 1,70 fabricar cada correa, ¿Cuántas correas debe utilizar la empresa cada mes para justificar la fabricación de sus propias correas?

4. Resuelva las desigualdades cuadráticas siguientes:

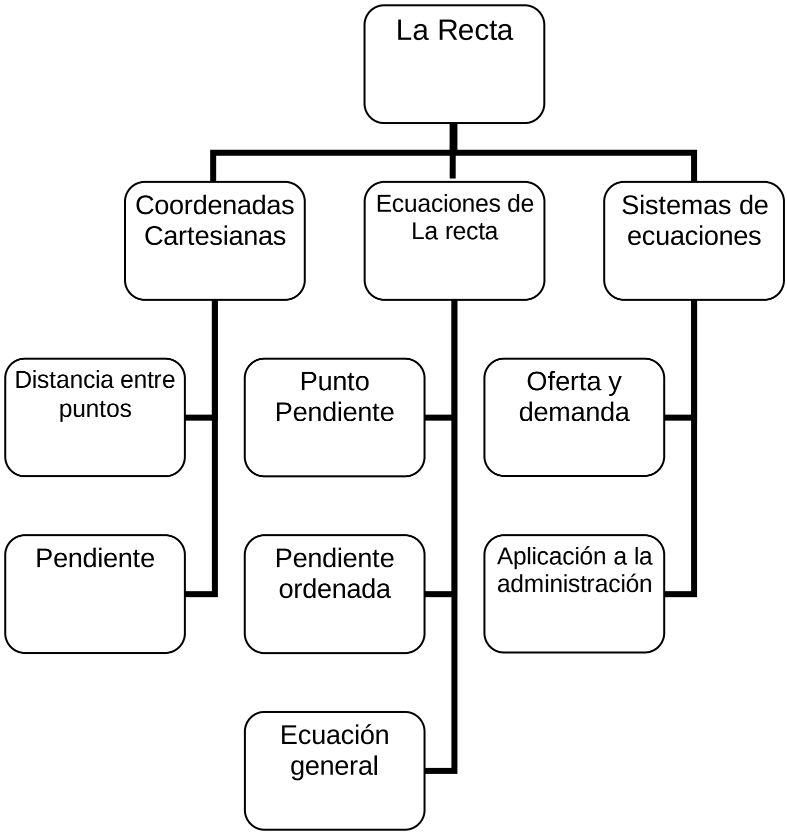
a) [illegible]

b) [illegible]

5. Al precio p por unidad, x unidades de cierto artículo pueden venderse al mes en el mercado con $p = 600 - 5x$ ¿Cuántas unidades deberá venderse al mes con el objeto de obtener ingresos de por lo menos de $ 18000?

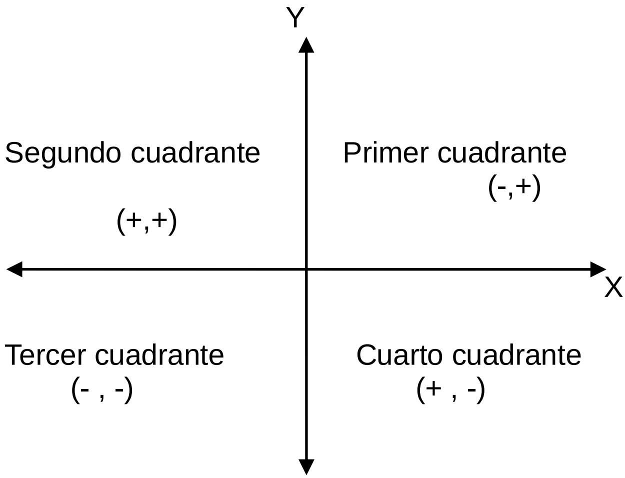
U N I D A D 4
ECUACIONES DE LA RECTA

Estudiaremos en esta unidad la ecuación de la línea recta, sistemas de ecuaciones, encontrando el punto de equilibrio entre las ecuaciones de oferta y demanda aplicadas a la administración.



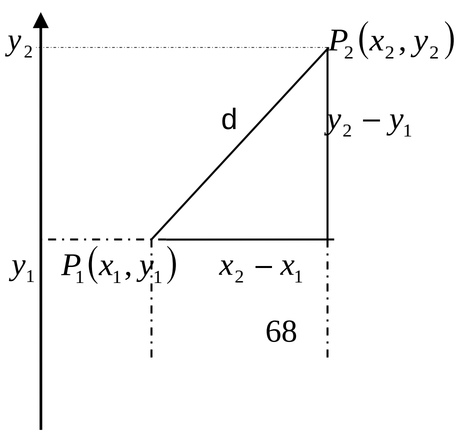
4.1. COORDENADAS CARTESIANAS

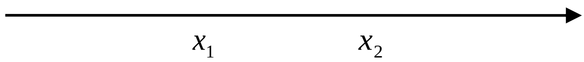
Las gráficas se construyen utilizando las llamadas coordenadas cartesianas. Dibujaremos dos rectas perpendiculares denominados ejes de coordenadas, una horizontal y otra vertical, interceptándose en un punto O. La línea horizontal se denomina abscisa o eje X, y la vertical se denomina ordenada o eje Y, y O es el origen. Un plano con tales ejes de coordenadas se denomina plano cartesiano o plano XY.



4.1.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera en el plano, entonces la distancia d entre P_1 y P_2 está dada por $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, demostración





Utilizando el teorema de Pitágoras tendremos:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 4.1

Encuentre la distancia entre los puntos $A(-3,1)\ y\ B(-2,-3)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(-2+3)^2 + (-3-1)^2}$$
$$d = \sqrt{1+16}$$
$$d = \sqrt{17}$$

Ejemplo 4.2

La abscisa de un punto es 2 y su distancia al punto $(3,-7)\ es\ \sqrt{5}$, Determine la ordenada del punto

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\sqrt{5} = \sqrt{(3-2)^2 + (-7-y)^2}$$
$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{1+49+14y+y^2}\right)^2$$
$$5 = 50 + 14y + y^2$$
$$y^2 + 14y + 45 = 0$$
$$(y+9)(y+5) = 0$$

$y = -9 \qquad\qquad y = -5$

La ordenada es -9 y -5

4.1.2. PENDIENTE DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Una de las propiedades más importantes de una línea recta es que tan inclinada es la recta y si sube o baja, este grado de inclinación se llama pendiente (m) y es el cociente entre la elevación y el recorrido, en símbolos:

$$m = \frac{elevación}{recorrido} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

4.2. ECUACIONES LINEALES

Una ecuación lineal con dos incógnitas representa en el plano cartesiano una recta, y está formada por todos aquellos puntos (X,Y) que satisfacen la ecuación.

4.2.1. ECUACIÓN PUNTO PENDIENTE DE LA RECTA

Al encontrar la pendiente de la recta que une los puntos (x_1, y_1) y (x, y) se tiene que:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_2}$$

Y por tanto se tiene $m(x - x_1) = y - y_1$

Ordenando será $y - y_1 = m(x - x_1)$ que es la ecuación de la recta cuando conoce punto y pendiente.

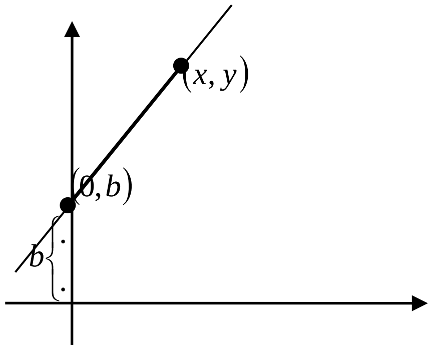
4.2.2. ECUACIÓN PENDIENTE ORDENADA AL

ORIGEN DE LA RECTA

Si en la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$ punto pendiente se transforma $(x_1, y_1)\ en\ (0, b)$ entonces la ecuación se tiene que

$$y - b = m(x + 0),$$
$$y - b = mx$$

Ordenando $y = mx + b$ y esta es la ecuación de la recta cuando conoce pendiente y ordenada al origen

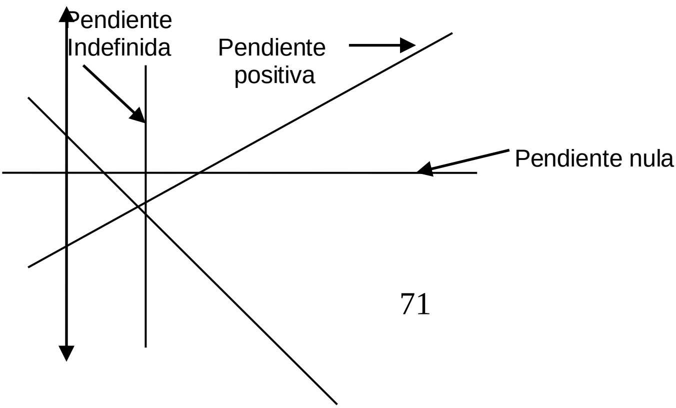


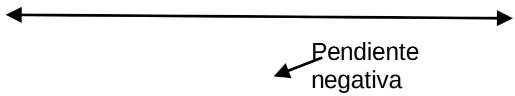
Si la línea es horizontal, entonces su pendiente es nula (m=0) y la ecuación se reduce a:

$$y = b$$

Si la línea es vertical entonces tendría la ecuación

$$x = a$$





La recta inclinada a la derecha tiene pendiente positiva y la que está inclinada a la izquierda tiene pendiente negativa

4.2.3. ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Una ecuación lineal general de la recta con dos variables x,y es de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

En donde A,B,C son constantes y A,B no son cero a la vez

4.2.4. RECTAS PARALELAS PERPENDICULARES

Dos rectas con pendientes m_1, m_2 son paralelas si sus pendientes son iguales $m_1 = m_2$

Dos rectas con pendientes m_1, m_2 son perpendiculares si la multiplicación de las pendientes son igual a -1 $\quad m_1 \cdot m_2 = -1$

Ejercicio 4.3

Determine la pendiente de la línea que une los puntos $(3,5)\ y\ (-1,5)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5-5}{3+1}$$
$$m = \frac{0}{4}$$
$$m = 0$$

Ejercicio 4.4

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-2) con pendiente -3

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 2 = -3(x-1)$$
$$y + 2 = -3x + 3$$

$3x + y - 1 = 0$ esta es la ecuación general de la recta que pasa por (1,-2) con pendiente -3

Ejercicio 4.5

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $(2,1)\ y\ (3,4)$

Hallamos primero la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{4-1}{3-2}$$

$$m = \frac{3}{1}$$
$$m = 3$$

Luego utilizamos cualquier punto y la pendiente para hallar la ecuación.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 3(x - 3)$$
$$y - 4 = 3x - 9$$

$3x - y - 5 = 0$ esta es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,1)\ y\ (3,4)$

Ejemplo 4.6

Determinar la ecuación de la recta que tiene pendiente -2 y ordenada al origen 5

$$y = mx + b$$
$$y = -2x + 5$$
$$2x + y - 5 = 0$$

Ejemplo 4.7

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,3)$ y es paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$

Primero encontramos la pendiente de la recta dada de la siguiente manera: $2x - y + 3 = 0$

$$-y = -2x - 3$$
$$y = 2x + 3$$

Al comparar con: $y = mx + b$ la pendiente es $m = 2$

Como las rectas son paralelas las pendientes son iguales entonces $m_2 = m_1$

$m_2 = 2$ por lo tanto la recta es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = 2(x - 1)$$
$$y - 3 = 2x - 2$$
$$2x - y + 1 = 0$$

Ejemplo 4.8

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(-1,2)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 4 = 0$

Primero hallamos la pendiente de la recta

$$2x - 3y + 4 = 0$$
$$-3y = -2x - 4$$
$$y = \frac{-2x - 4}{-3}$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

Comparando $y = mx + b$ la pendiente es $m_1 = \frac{2}{3}$

Como son perpendiculares se cumple que:

$$m_2 \cdot m_1 = -1$$
$$m_2 \cdot \frac{2}{3} = -1$$
$$m_2 = -\frac{3}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1)$$
$$2y - 4 = -3x - 3$$
$$3x + 2y - 1 = 0$$

Ejemplo 4.9

Determine si las rectas de ecuaciones $4x+2y=1$ $\quad y=2-2x$ son paralelas, perpendiculares o de ninguno de estos tipos

Se debe hallar las pendientes de las dos ecuaciones para luego analizarles que cumplen.

$$4x+2y=1 \qquad\qquad y=2-2x$$
$$2y=-4x+1 \qquad\qquad y=-2x+2$$
$$y=\frac{-4x+1}{2} \qquad\qquad y=-2x+2$$
$$y=-2x+\frac{1}{2} \qquad\qquad y=-2x+2$$
$$m_1=-2 \qquad\qquad m_2=-2$$

Como $m_1=m_2$ entonces las rectas son paralelas

Ejemplo 4.10

La empresa FACA produce dos productos X, Y cada unidad de X requiere 3 horas trabajo y cada unidad de Y requiere 4 horas trabajo, hay 120 horas trabajo disponible cada día.

a) Si x unidades de X, y unidades de Y se fabrican al día y se emplean todas las horas trabajo, encuentre la relación entre x, y
b) De la interpretación física de la pendiente de la relación lineal obtenida.
c) ¿Cuántas unidades de x puede fabricarse en un día si se produce 15 unidades de Y en el mismo día?
d) ¿Cuántas unidades de Y pueden producirse en un día si se fabrican 16 unidades de X en el mismo día?

SOLUCIÓN:

a) Como x es el número de unidades y cada unidad de X requiere de 3 horas trabajo tendríamos 3x
Como y es el número de unidades de Y y cada unidad requiere 4 horas trabajo tendríamos 4y
La ecuación sería $3x + 4y = 120$

b) La pendiente de la ecuación $3x + 4y = 120$ es $m = \frac{3}{4}$ ésta pendiente significa que por cada 4 unidades producidas de x se puede producir 3 unidades de y

c) Como de y se produce 15 unidades al día de x se producirá: reemplazamos en la ecuación

$$3x + 4y = 120$$
$$3x + 4 \cdot 15 = 120$$
$$3x = 120 - 60$$
$$x = \frac{60}{3}$$
$$x = 20$$

Es decir que se puede producir 20 unidades de X

d) Como se produce 16 unidades de x se tendría

$$3x + 4y = 120$$
$$3 \cdot 16 + 4y = 120$$
$$4y = 120 - 48$$
$$y = \frac{72}{4}$$
$$y = 18$$

Es decir que se puede producir 18 unidades de Y cuando se ha producido 16 unidades de x

4.3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de dos o más ecuaciones es un conjunto con dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales puede presentar los siguientes casos.

a) Tiene una solución es **simultánea y consistente**
b) No tiene solución es **incompatible o inconsistente**
c) Tiene infinitas soluciones es **indeterminado.**

4.3.1. ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS CON DOS INCÓGNITAS

La expresión general de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos variables es:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

La solución de este sistema es un par ordenado (x, y) que verifica ambas ecuaciones. Para resolver estas ecuaciones se utiliza los siguientes métodos:

4.3.1.1. SOLUCIÓN POR ELIMINACIÓN (SUMA O RESTA)

Este método consiste en multiplicar adecuadamente a una de las dos ecuaciones (o ambas) una cantidad de tal manera que las cantidades de una de las variables sean iguales pero de signo contrario, de modo que al sumar las dos ecuaciones se elimine dicha variable.

Ejemplo 4.11

Resolver por eliminación el siguiente sistema:

$$2x - 5y - 19 = 0$$

$$3x + 4y + 6 = 0$$

Para eliminar x multiplicamos por 3 a la primera ecuación y a la segunda por -2; así obtendríamos

$$\begin{array}{r} 6x - 15y - 57 = 0 \\ -6x - 8y - 12 = 0 \\ \hline -23y - 69 = 0 \end{array}$$

$$y = -\frac{69}{23}$$

$$y = -3$$

Reemplazando en una de las ecuaciones tendríamos

$$2x - 5(-3) - 19 = 0$$

$$2x + 15 - 19 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Luego la solución es el par $(2,-3)$

4.3.1.2. SOLUCIÓN POR SUSTITUCIÓN

Se despeja una de las incógnitas de cualquiera de las ecuaciones, y se sustituye la variable por esta expresión en la otra ecuación. La ecuación obtenida por sustitución contiene una sola variable y por consiguiente podemos resolver fácilmente.

Ejercicio 4.12

Resolver por sustitución el sistema:

$$x + 3y = 4$$

$$3x - 5y + 2 = 0$$

Despejamos x de la primera ecuación

$$x = 4 - 3y$$

Reemplazamos $3(4-3y) - 5y + 2 = 0$

$$12 - 9y - 5y + 2 = 0$$

$$-14y = -14$$

$$y = \frac{-14}{-14}$$

$$y = 1$$

Ahora reemplazamos y en la ecuación despejada inicialmente

$$x = 4 - 3y$$

$$x = 4 - 3(1)$$

$$x = 1$$

Luego la solución es $(1,1)$

4.3.1.3. SOLUCIÓN POR IGUALACIÓN

Este método consiste en despejar en ambas ecuaciones la misma variable, y luego igualarlas para obtener una ecuación con una sola variable

Ejemplo 4.13

Resolver por igualación del sistema:

$$2x - 5y + 8 = 0$$

$$x + 4y - 9 = 0$$

Despejando y tendríamos

$$y = \frac{2x+8}{5}$$

$$y = \frac{9-x}{4}$$

Igualando $\dfrac{2x+8}{5} = \dfrac{9-x}{4}$

$$4(2x+8)=5(9-x)$$
$$8x+32=45-5x$$
$$13x=13$$
$$x=1$$

Reemplazando en cualquier ecuación

$$y=\frac{2(1)+8}{5}$$
$$y=\frac{10}{5}$$
$$y=2$$

Luego la solución es $(1,2)$

4.3.2. ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS CON TRES O MÁS INCOGNITAS

El procedimiento es transformar un sistema de tres incógnitas a un sistema de dos incógnitas. Y seguidamente transformar este sistema en una ecuación lineal.

Ejemplo 4.14

Resuelva el siguiente sistema:

$$2x-y+3z+9=0$$
$$x+3y-z-10=0$$
$$3x+y-z-8=0$$

Eliminaremos x entre la primera y la segunda ecuación multiplicando a la segunda por -2

$$\begin{array}{r} 2x-y+3z+9=0 \\ \underline{-2x-6y+2z+20=0} \\ -7y+5z+29=0 \end{array}$$

Ahora eliminando la misma variable x entre la segunda y la tercera, la segunda ecuación multiplicamos por -3

$$
\begin{array}{r}
-3x-9y+3z+30=0 \\
3x+y-z-8=0 \\
\hline
-8y+2z+22=0
\end{array}
$$

Las ecuaciones resultantes son:

$$-7y+5z+29=0$$
$$-8y+2z+22=0$$

A este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas eliminamos z multiplicando la primera por -2 y la segunda por **5**

$$
\begin{array}{r}
14y-10z-58=0 \\
-40y+10z+110=0 \\
\hline
-26y \qquad +52=0
\end{array}
$$

$$y=\frac{-52}{-26}$$

$$y=2$$

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema de 2x2 tendríamos

$$-7y+5z+29=0$$
$$-7(2)+5z+29=0$$
$$-14+5z+29=0$$
$$5z=-15$$
$$z=-3$$

Reemplazado z.y en una ecuación obtenemos:

$$3x+y-z-8=0$$
$$3x+2+3-8=0$$
$$3x=3$$
$$x=1$$

Luego la solución es: $(1,2,-3)$

Ejemplo 4.15

La tienda el sol que se especializa en todo tipo de frituras, vende cacahuates a $ 0,70 la libra y almendras a $ 1,60 la libra, Al final de un mes, el propietario se entera que los cacahuates no se venden bien y decide mezclar cacahuates con almendras para producir una mezcla de 45 libras, que venderá a $ 1,00 dólar la libra, ¿Cuántas libras de cacahuates y de almendras deberá mezclar para mantener los mismos ingresos?

Las libras de cacahuates que la mezcla contiene es: x
Las libras correspondientes de almendras es: y
Dado que el peso total de la mezcla es de 45 libras

$$x + y = 45$$

El ingreso de x libras de cacahuates a $ 0,70 l la libra es de 0,70x dólares, el ingreso de y libras de almendras a $ 1,60 la libra es de 1,6y, el ingreso obtenido de la mezcla de 45 dólares a $ 1,00 por libra será de 45 dólares.

Ingreso cacahuates + ingreso almendras=ingreso mezcla

$$0{,}7X + 1{,}6Y = 45$$
$$7X + 16Y = 450$$

Entonces el sistema es el siguiente:

$$x + y = 45$$
$$7X + 16Y = 450$$

Despejando x de la primera ecuación tenemos $x = 45 - y$, luego sustituimos este valor y obtenemos

$$7(45-y)+16y=450$$
$$315-7y+16y=450$$
$$9y=450-315$$
$$y=15$$

Luego $x=45-y$

$$x=45-15$$
$$x=30$$

Por lo tanto 30 libras de cacahuates debe mezclarse con 15 libras de almendras para formar la mezcla.

Ejemplo 4.16

Un pez de la especie 1 consume por día 10 gramos de la comida 1 y 5 gramos de la comida 2, Un pez de la especie 2 consume por día 6 gramos de la comida 1 y 4 gramos de la comida 2. Si un medio ambiente dado tiene 2,2, kilogramos de comida 1 y 1,3 kilogramos de comida 2 disponible diariamente, ¿Qué tamaño de población de las dos especies consumirá toda la comida disponible?

Utilizando los datos tendríamos

	Comida 1	Comida2
Especie 1: x	10x	5x
Especie 2: y	6y	4y
	2,2,	1,3

Las ecuaciones son:

$$10x+6y=2200$$
$$5x+4y=1300$$

Multiplicando por -2 a la segunda ecuación tendríamos:

$$\begin{array}{r} 10x+6y=2200 \\ -10x-8y=-2600 \\ \hline -2y=-400 \\ y=200 \end{array}$$

$5x+800=1300$

$5x=500$

$x=100$

Por lo tanto se necesita 100 peces se la especie 1 y 200 de especie 2

4.4. APLICACIONES AL ANÁLISIS DE LA ADMINISTRACIÓN

Estudiaremos algunas aplicaciones de las ecuaciones lineales y líneas rectas a problemas en la administración y economía.

4.4.1. MODELOS DE COSTO LINEAL

En la producción de cualquier bien por una empresa, intervienen dos tipos de costos; que se conocen como costos fijos, y costos variables.

Los costos fijos no dependen del nivel de producción, como rentas, salarios de administración, entre otros.

Los costos variables dependen del nivel de producción es decir de la cantidad de artículos producidos, materiales, mano de obra.

Costo Total = Costos variables + Costos fijos

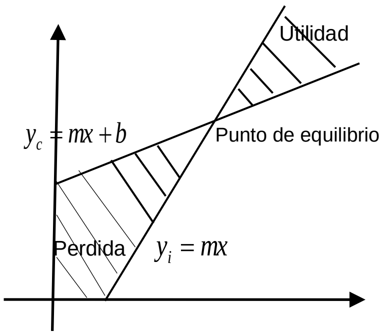
$$y_c = \underbrace{mx}_{\text{Costos variables}} + \underbrace{b}_{\text{Costos fijos}}$$

4.4.2. ANALISIS DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

Si el costo total y_c de producción excede al de los ingresos y_i obtenidos por las ventas, entonces el negocio sufre una perdida. Si los ingresos sobrepasan a los costos, existe una utilidad, si el costo de producción es igual a los ingresos obtenidos por las ventas, no hay utilidad ni perdida, de modo que el negocio esta en el punto de equilibrio. El número de unidades producidas y vendidas en este caso se denomina punto de equilibrio.

$y_c = mx + b$ Ecuación total de costo

$y_i = mx$ Ecuación de ingresos



Ejemplo 4.17

Para un fabricante de relojes, el costo de mano de obra y de los materiales por reloj es de $ 15 dólares y los costos fijos son de $ 2000 al día. Si vende cada reloj a $ 20. ¿Cuántos relojes deberá producir y vender cada día con el objeto de garantizar que el negocio se mantiene en el punto de equilibrio?

SOLUCIÓN:

Sea x el número de artículos producidos y vendidos
El costo de producir es:

$$y_c = \cos tos \operatorname{var} iables\, totales + \cos tos\ fijos$$

$$y_c = 15x + 2000$$

Dado que cada reloj se vende a $20 el ingreso obtenido por vender x artículos es: $y_i = 20x$

El punto de equilibrio se obtiene cuando los ingresos son iguales a los costos, entonces:

$$20x = 15x + 2000$$

$$5x = 2000$$

$$x = 400$$

De modo que deberá producir y vender 400 relojes al día para garantizar que no haya utilidad ni perdida.

Ejemplo 4.18

Los costos fijos por producir cierto artículo son de $ 5000 al mes y los costos variables son de $ 3,50 por unidad. Si el productor vende cada uno a $ 6.

a) Encuentre el punto de equilibrio

b) Determine el número de unidades que debe producirse al mes para obtener una utilidad de $ 1000 mensuales.

c) Obtenga la perdida cuando sólo 1500 unidades se produce y se vende al mes.

SOLUCIÓN:

Encontramos primero las ecuaciones de costo y las de ingresos

$$y_c = 3{,}50x + 5000$$

$$y_i = 6x$$

$$6x = 3{,}50x + 5000$$

$$2{,}50x = 5000$$
$$x = 2000$$

a) Deberá producir y vender al mes 2000 artículos para no tener ganancia ni perdida.

b) Para hallar la utilidad $U = y_i - y_c$

$$U = 6x - (3{,}50x + 5000)$$
$$1000 = 6x - 3{,}50x - 5000$$
$$6000 = 2{,}50x$$
$$x = 2400$$

Debe producir y vender al mes 2400 artículos para obtener una ganancia de $ 1000 mensuales

c) Como solo se produce 1500 artículos entonces $x = 1500$ y tendríamos

$$U = y_i - y_c$$
$$U = 6x - (3{,}50x + 5000)$$
$$U = 6x - 3{,}50x - 5000$$
$$U = 6(1500) - 3{,}50(1500) - 5000$$
$$U = 9000 - 5200 - 5000$$
$$U = 1200$$

Si produce solo 1500 artículos tendría una perdida de $ 1200

4.4.3. OFERTA DEMANDA

La ley de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. La cantidad x de cualquier artículo que será adquirido por los consumidores depende del precio al cual el artículo está disponible en el mercado.

Una relación que especifica la cantidad de un artículo determinado y que los consumidores están dispuestos a comprar a varios niveles de precios se denomina **ley de la demanda,** en símbolos es:

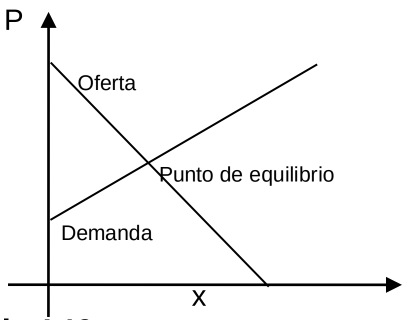
$$x = a - bp$$

En donde p es el precio por unidad del artículo x, es claro que a medida que aumenta el precio baja el número de artículos que se demanda.

Una relación que especifique la cantidad de cualquier artículo que los fabricantes puedan ponerle en el mercado a varios precios se denomina **ley de la oferta.**

$$x = c + dp$$

En donde x es el número de artículos y p es el recio de cada artículo, a medida que el precio aumenta el número de artículos que se oferta en el mercado también se aumenta



Ejemplo 4.19

Dadas las ecuaciones de oferta $p = 2x + 1$, y demanda de $p = 28 - x$, determine el precio y la cantidad de equilibrio de dicho artículo.

SOLUCIÓN:

Aplicamos igualación para resolver el sistema

$$2x + 1 = 28 - x$$

$$2x + x = 28 - 1$$
$$3x = 27$$
$$x = 9$$

Luego $p = 2 \cdot 9 + 1$

$$p = 19$$

Esto significa que el precio de equilibrio es de \$ 19 y se debe producir 9 artículos

Ejemplo 4.20

Un comerciante puede vender 20 rasuradoras eléctricas al día al precio de \$ 25 cada una, pero puede vender 30 si les fija un precio de \$ 20 a cada rasuradora eléctrica. Determine la ecuación de la demanda suponiendo que es lineal.

SOLUCIÓN:

Como $x = 20,\ \ p = 25 \quad y \quad x = 30,\ \ p = 20$

Entonces $(20,25) \quad y \quad (30,20)$

$$m = \frac{20 - 25}{30 - 20} = -\frac{5}{10} = -0{,}5$$

La ecuación que pasa por el punto $(20,25)$ y tiene pendiente m = -0,5 es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dado que y = p tendremos

$$p - 25 = -0{,}5(x - 20)$$
$$p = -0{,}5x + 35$$

Esta es la ecuación de la demanda requerida

La esclavitud es hija de las tinieblas; un pueblo ignorante es instrumento ciego de su propia destrucción

EJERCICIOS PROPUESTOS
Autoevaluación 4

1. Encuentre la distancia entre cada pareja de puntos:
   a) (4,-1) (2,0)

   b) (-3,1) (-2,-3)

2. La abscisa de un punto es 2 y su distancia al punto (3,-7) es $\sqrt{5}$. Encuentre la ordenada del punto

3. Se nos da el punto P(x,2), la distancia de P al punto A(9,-6) es dos veces la distancia al punto B(-1,5) Encuentre el valor de x

4. Dibuje la gráfica de la relación de demanda siguiente, donde p denota el precio por unidad y q es la cantidad demandada
   a) p = -2q + 5

   b) 2p + 3q = 8

   c) $p+q^2=14$

   d) $p=25-q^2$

5. Determine la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las relaciones lineales siguientes
   a) 3x – 2y = 6

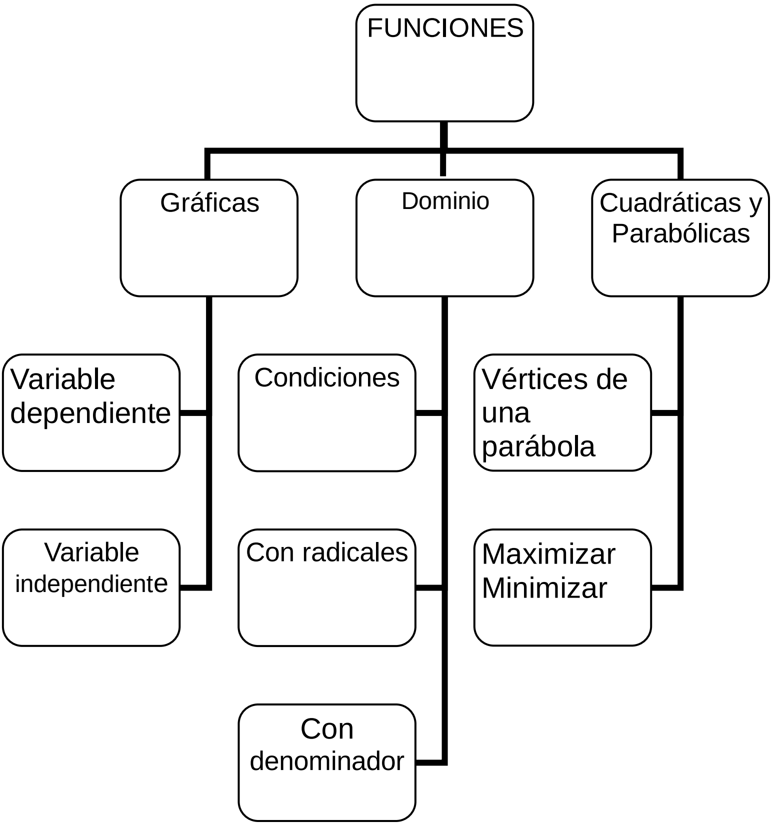
b) $4x + 5y = 20$

6. El gobierno de una ciudad tiene un presupuesto de 200 millones para gastos de transporte, e intenta utilizarlos para construir otras líneas de tren subterráneo o carreteras. Si cuesta 2,5 millones un kilómetro de carretera y 4 millones construir un kilómetro de línea de tren subterráneo. Encuentre la relación entre número de kilómetros de carretera y de línea de tren subterráneo que puede construirse utilizando la totalidad de presupuesto, interprete la pendiente de la relación lineal que se obtiene.

U N I D A D
FUNCIONES Y GRÁFICAS

5

El estudio de funciones es importante para la toma de decisiones, pudiendo maximizar sus ingresos y minimizar sus gastos.



5. 1. FUNCIONES

Sean *X, Y* dos conjuntos no vacíos. Una función de *X* en *Y* es una regla que se asigna para que a cada elemento $x \in X$, una única $y \in Y$.

Si una función asigna *y* a un $x \in X$ particular, decimos que *y* es el valor de la función en *x;* $y = f(x)$, a las funciones asignamos por las letras $f,\ g,\ h,\ F,\ G,$ entre otras.

Si una función se expresa por la relación del tipo $y = f(x)$, entonces x se denomina la **variable independiente** o **argumento de f**, y *y* se conoce como la **variable dependiente.**
El conjunto *X,* para el cual *f* asigna una única $y \in Y$, se denomina el dominio de la función *f*, y se indica Df.
El conjunto de valores $y \in Y$ se le conoce como el rango de la función y se le denota como Rf

Ejemplo 5.1

Dada $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ calcule el valor de f cuando $x = a,\ x = 3,\ \ x = -2,\ \ x = -\dfrac{1}{4}$ es decir, evalúe $f(a),\ f(3),\ f(-2),\ f\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

SOLUCIÓN:

Por lo tanto tendremos

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$$
$$f(a) = 2a^2 - 5x + 1$$

$$f(3)=2\cdot 3^2-5\cdot 3+1=18-15+1=4$$
$$f(-2)=2(-2)^2-5(-2)+1=8+10+1=19$$
$$f\left(-\frac{1}{4}\right)=2\left(-\frac{1}{4}\right)^2-5\left(-\frac{1}{4}\right)+1=\frac{1}{8}+\frac{5}{4}+1=\frac{19}{8}$$

Ejemplo 5.2

Dada $g(x)=3x^2-2x+5$ evalúe

a) $g(1+h)$

b) $g(1)+g(h)$

c) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

SOLUCIÓN:

a) Con el propósito de evaluar $g(1+h)$, debemos sustituir x por 1+h

$$g(x)=3x^2-2x+5$$
$$g(1+h)=3(1+h)^2-2(1+h)+5$$
$$g(1+h)=3(1+2h+h^2)-2-2h+5$$
$$g(1+h)=3h^2+4+6$$

b) $$g(x)=3x^2-2x+5$$
$$g(1)+g(h)=3\cdot 1^2-2\cdot 1+5+3(h^2)-2(h)+5$$
$$g(1)+g(h)=3-2+5+3h^2-2h+5$$
$$g(1)+g(h)=3h^2-2h+11$$

c) $g(x)=3x^2-2x+5$

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-2(x+h)+5-3x^2+2x-5}{h}$$

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{3x^2-2x+5+h(3h+6x-2)-3x^2+2x-5}{h}$$

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=3h+6x-2$$

La cantidad $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ para una función dada es de gran importancia para el cálculo

5.2. GRÁFICA DE FUNCIONES

La gráfica de una función f se obtiene dibujando todos los puntos (x,y), en donde x pertenece al dominio de f y $y=f(x)$ recorrido, manejando x,y como coordenadas cartesianas, en donde los dominios y rangos de las funciones son subconjuntos de los números reales.

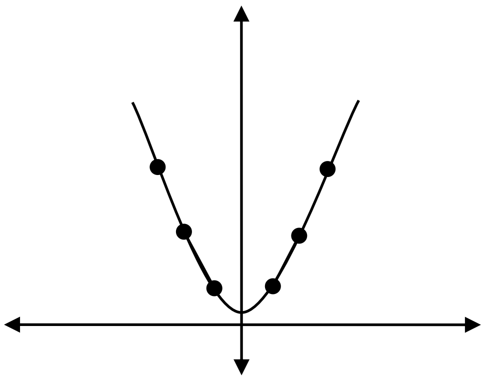
Ejemplo 5.3

Dada la función $f(x)=2+0{,}5x^2$ hallar el dominio y graficar la función.

SOLUCIÓN:

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales dado que podemos evaluar $f(x)$ para cualquier valor real de x. Podemos indicar algunos valores de x que es el dominio y también hallar los valores de $y=f(x)$. Al representar los puntos en el plano cartesiano y unir los mismos obtenemos una curva en forma de U.

x	0 1 2 3 4 -1 -2 -3
$y=f(x)$	2 2,5 4 6,5 10 2,5 4 6,5

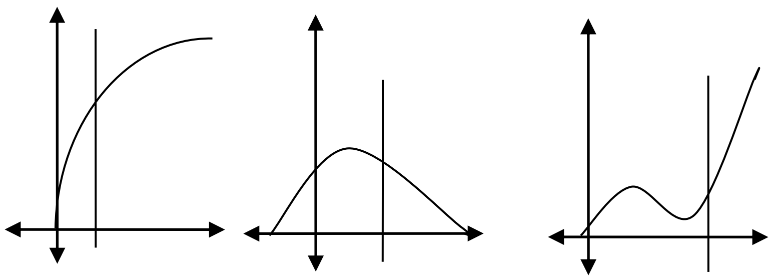


5.2.1. CRITERIO DE LA LÍNEA VERTICAL

La curva representada en un plano cartesiano es una función si al trazar verticales, estas cortan únicamente en un punto con dicha curva.

Ejemplo 5.4

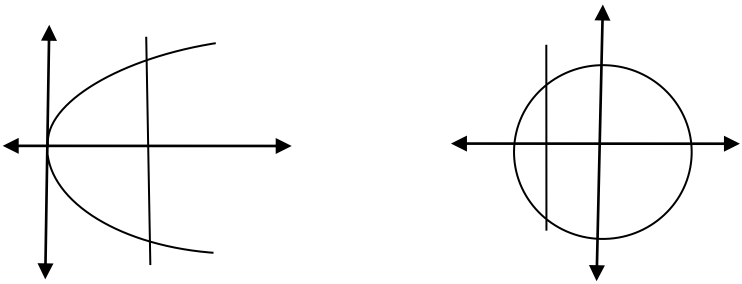
Establezca si las gráficas siguientes representan o no funciones



Las gráficas anteriores si representan funciones, ya que al trazar verticales, estas se cortan únicamente en un punto con la curva.

Ejemplo 5.5

Establezca si las gráficas siguientes representan o no funciones



Las gráficas anteriores no representan funciones, ya que al trazar verticales, estas se cortan en dos punto con la curva.

5.2.2. DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Gráficamente el dominio de la función está definido por los valores del eje x en los cuales está definida la curva. En forma análoga los valores en el eje y para los cuales está definida la curva constituyen el rango de la función.

Para determinar el dominio de una función expresada en forma de ecuación se debe tener en cuenta las siguientes condiciones:

a) Cualquier expresión que esté dentro de una raíz par no puede ser negativa, es decir su valor debe ser mayor que cero

b) El denominador de cualquier fracción que esté representando una función no puede ser igual a cero, es decir debe ser diferente de cero.

Ejemplo 5.6

Determine el dominio de la función $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$

SOLUCIÓN:

Para el número real al cual no está bien definida la función es $x=2$, en los demás casos la función está bien definida, o sea el dominio es:

$$Df = todos los reales menos el número 2$$

Ejemplo 5.7

Encuentre el dominio de f si $f(x)=\sqrt{x-4}$

SOLUCIÓN:

El dominio de f es el conjunto de todos los valores para los cuales la expresión dentro del radical no es negativa, esto es:

$$x-4\geq 0$$
$$x\geq 4$$
$$Df = todos los\ reales\ mayores\ que\ 4$$

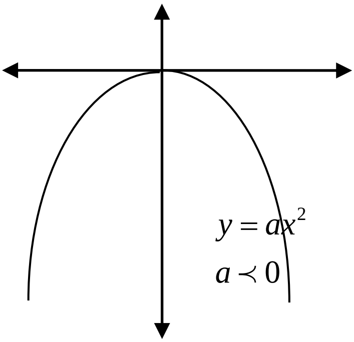
5.3. FUNCIONES CUADRÁTICAS Y PARÁBOLAS

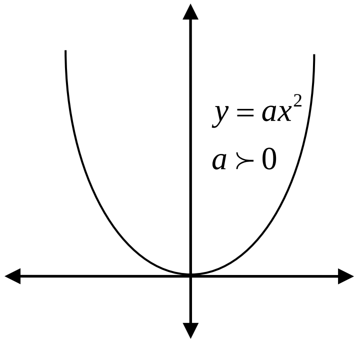
Una función de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, es una función cuadrática en donde a,b,c son constantes,

El dominio de $f(x)$ es el conjunto de todos los números reales. La gráfica de una función cuadrática es una curva denominada **parábola**

La gráfica de la función $f(x)=ax^2+bx+c$ es una parábola que se abre hacia arriba si $a\succ 0$ y hacia abajo si $a\prec 0$, y es el punto más bajo si $a \succ 0$, y es el punto más alto si $a \prec 0$, el vértice tiene coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \qquad x=-\frac{b}{2a} \qquad y=\frac{4ac-b^2}{4a}$$





Ejemplo 5.8

Determine el valor mínimo o máximo en la función $f(x)=3x^2+x-1$

SOLUCIÓN:

Como $a \succ 0$ entonces el valor será un mínimo, para hallar x utilizamos: $x=-\dfrac{b}{2a}$

$$x=-\frac{1}{2\cdot 3}$$

$$x=-1/6$$

Para hallar $f(x)$ reemplazamos el valor anterior en la función

$$f(x)=3x^2+x-1$$

$$f(x)=3\left(-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}-1$$

$$f(x)=\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-1$$

$$f(x)=-\frac{13}{12}$$

Por lo tanto el vértice es un mínimo y es: $\left(-\frac{1}{6},-\frac{13}{12}\right)$

Ejemplo 5.9

La utilidad $P(x)$ obtenida por fabricar y vender x unidades de cierto producto está dada por $P(x)=60x-x^2$, Determine el número de unidades que debe producirse y venderse con el objeto de maximizar la utilidad, ¿Cuál es esta utilidad máxima?

SOLUCIÓN:
Para encontrar el número de unidades que se debe producir utilizamos $x=-\frac{b}{2a}$

$$x=-\frac{60}{-2}$$

$$x=30$$

Para hallar la máxima utilidad reemplazamos x en la ecuación $P(x)=60x-x^2$

$$P(x)=60\cdot 30-30^2$$

$$P(x)=900$$

Por tanto se debe producir 30 artículos para obtener una máxima utilidad que es de 900 dólares.

Ejemplo 5.10

El Señor Alonso es propietario de un edificio de departamentos con 60 habitaciones, él puede alquilar todas si fija un alquiler mensual de $ 200 por habitación. Con un alquiler más alto algunas habitaciones quedarán vacías sin posibilidad alguna de alquilarse. Determine la relación funcional entre el ingreso mensual tota y el número de habitaciones vacías. ¿Qué alquiler mensual maximizará el ingreso total? ¿Cuál es este ingreso máximo?

SOLUCIÓN:

Sea x el número de habitaciones vacías. El número de departamentos alquilados es entonces $(60-x)$, y el alquiler mensual por habitación es $(200+5x)$dólares. Si R denota el ingreso mensual total en dólares se tiene que

$$R=(renta\,por\,unidad)(número de unidades rentadas)$$

$$R=(200+5x)(60-x)$$

$$R=-5x^2+100x+12000$$

Esta es la ecuación en función del ingreso total mensual y el número de habitaciones vacías.

Como $a \prec 0$ entonces la gráfica se abre hacia abajo y su vértice es el punto máximo, el vértice está dado por:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$x=-\frac{100}{2(-5)}=10$$

$$R=-5x^2+100x+12000$$

$$R=-5(10)^2+100(10)+12000$$

$$R=12500$$

En consecuencia si 10 habitaciones están desocupadas, los ingresos son máximos. El alquiler por habitación es entonces de (200+5x) dólares es decir 250 dólares con un ingreso total al mes de 12500 dólares.

El descubrir la esencia de las cosas es dar un paso enorme en la historia ya que la verdad no es solo hermosa, sino que también es auténtica y mas aúnes: es revolucionaria

EJERCICIOS PROPUESTOS
Autoevaluación 5

1. Dada $f(x)=3x+2$. Calcule:

$f(1), f(-2), f(x^2), f(x+h)$ [illegible]

2. Dada $f(t)=5t+7$.Calcule:

[illegible]

4. Dada $f(x)=3$. Calcule:

$f(1), f(x^2), f(x+1), f(x+h)$ [illegible]

5. Dada $f(x)=\sqrt{x}$. Calcule: $f(4), f(x^2), f(a^2+h^2)$

Resp: $2; x; \sqrt{a^2+h^2}$

6. Dada $f(t)=3t^2-5t+7$.Calcule:

[illegible]

Resp: [illegible]

7. Dada $g(x)=\begin{cases} 4x+3 & si\ -2\leq x<0 \\ 1+x^2 & si\ 0\leq x\leq 2 \\ 7 & si\ x>2 \end{cases}$

Evalúe cada uno de los valores siguientes:

a) g (1)   b) g (3)   c) g (-1)

8. Trace las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} 1 & si\ x>0 \\ 2 & si\ x<0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 1 & si\ x<0 \\ x & si\ x\geq 0 \end{cases}$

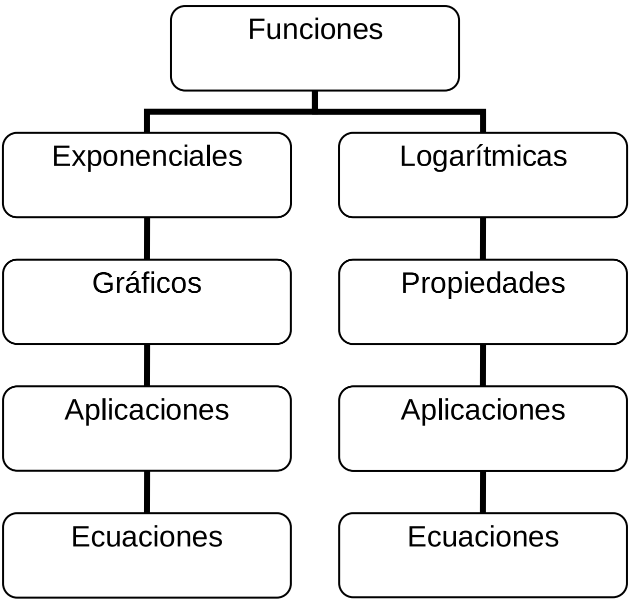
c) $f(x)=\begin{cases} x & si\ x>1 \\ -x & si\ x<1 \end{cases}$

9.Para la función de costo $C(x)=1\times10^{-6}x^{3}-(1\times10^{-3})x^{2}+3x+6200$ Calcule el costo de producir a) 2000 unidades b) 500 unidades

10. Una compañía ha determinado que el costo de producir x unidades de su producto por semana está dado por $C(x)=5000+$[illegible] evalué el costo de producir: a) 100 unidades por semana b) 2500 unidades por semana c) ninguna unidad Resp: a) 13 000 b) 32 500 c) 5 000

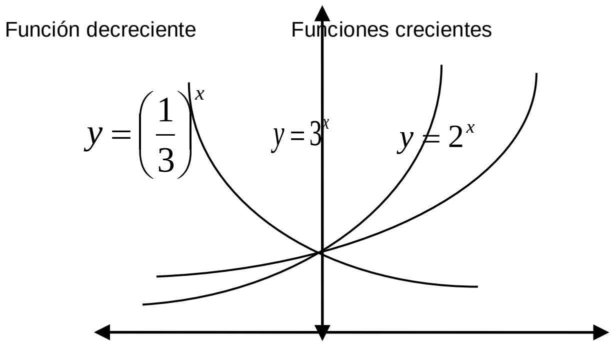
U N I D A D 6
FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En ésta unidad trataremos como se debe resolver ecuaciones que contengan sus incógnitas en los exponentes o en algún logaritmo.



6.1. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Una función exponencial es de la forma $y = a^x$, en donde la base a es un número positivo, si $a \succ 1$, la función se conoce como función exponencial creciente, mientras si $a \prec 1$, se llama función exponencial decreciente.



Con frecuencia se utiliza un número irracional $e = 2{,}71828...$ como base. La función exponencial correspondiente se denota $y = e^x$, y se denomina función exponencial natural.

Ejemplo 6.1

Empleando una calculadora encuentre los valores siguientes.

a) e^2 $\quad b) e^{5,55}$ $\quad c) e^{-0,24}$

SOLUCIÓN:

a) $e^2 = (2,71828\,...)^2 = 7,389056$

b) $e^{2,55} = (2,71828\,...)^{2,55} = 12,8071$

c) $e^{-0,24} = (2,71828\,...)^{-0,24} = 0,786627861$

Ejemplo 6.2

El crecimiento de la población de cierta ciudad al tiempo t medido en años está dado por la fórmula $P = 50000e^{0,05t}$, calcular la población cuando $t = 10$ años.

SOLUCIÓN:

Reemplazamos $t = 10$ en $P = 50000e^{0,05t}$

$$P = 50000e^{0,05(10)}$$

$$P = 50000e^{0,5}$$

$$P = 82436,06$$

La población en 10 años habrá aumentado a 82436 habitantes

6.1.1. INTERÉS COMPUESTO

Otro caso en que las funciones exponenciales aparecen se refieren a interés compuesto y sus operaciones financieras.

Se tiene interés compuesto, cuando el interés generado en un período se adiciona al capital original formando un nuevo capital, capitalización que puede ser anual trimestral, semestral, entre otros.

Se llama **frecuencia de conversión o capitalización (f)** al número de veces que el interés se convierte en capital en un año .**Periodos de capitalización (n)** son mensuales, trimestrales, semestrales, entre otros, y se calcula como:

$$n = número de años \cdot frecuencia$$

La **tasa de interés (i)** por periodo de capitalización significa la tasa diaria, mensual, trimestral, entre otras, la tasa debe estar en tanto por uno, es decir tasa dividida para 100 y se calcula como:

$$i = \frac{tasa\,anual}{frecuencia}$$

El monto o valor futuro (F) de un capital o valor presente (P) esta dado por la fórmula:

$$F = P(1+i)^n$$

Las **tasas de interés equivalentes** son aquellas que producen un mismo monto en un año, con periodos de capitalización deferentes, Las **tasas nominales** se capitalizan varias veces en el año y se representa como (j).
La **tasa efectiva** es la que actúa en el capital una vez en el año y se representa como (i). Su equivalencia es:

$$1+i = \left(1+\frac{j}{f}\right)^f$$

Ejemplo 6.3

Una suma de $ 200 se invierte a un interés compuesto anual del 5%, calcular el valor de la inversión después de 10 años.

SOLUCIÓN:

En éste caso la tasa anual es de 5% y el tanto por uno será de 0,05 y como la frecuencia es uno porque solo se capitaliza una vez en el año tendríamos:

$$f = 1$$

$$i = \frac{tasa\,anual}{frecuencia} = \frac{0,05}{1} = 0,05$$

$$n = número\,años \cdot frecuencia = 10 \cdot 1 = 10$$

$$P = 200$$

Aplicando la fórmula tendríamos:

$$F = P(1+i)^n$$

$$F = 200(1+0,05)^{10}$$

$$F = 325,78$$

Luego de 10 años por haber invertido \$ 200 obtendrá 325,78 dólares.

Ejemplo 6.4

Una suma de \$ 2000 se invierte a una tasa de interés nominal del 9% anual capitalizable mensualmente. Calcular el valor de la inversión después de 3 años.

SOLUCIÓN:

Como la inversión se capitaliza mensualmente se tiene que:

$$f = 12$$

$$i = \frac{tasa\,anual}{frecuencia} = \frac{0,09}{12} = 0,0075$$

$$n = número\,años \cdot frecuencia = 3 \cdot 12 = 36$$

$$P = 2000$$

Entonces como:

$$F = P(1+i)^n$$

$$F = 2000(1+0{,}0075)^{36}$$

$F = 2617{,}29$ dólares

Ejemplo 6.5

Cierta máquina se deprecia de tal forma que su valor después de t años viene dada por $V(t) = 1400000\ e^{-0{,}03t}$ ¿Cuál es el valor de dicha máquina después de 5 años?

SOLUCIÓN:

Para t=5 $$V(t) = 1400000\ e^{-0{,}03t}$$

$$V(5) = 1400000\ e^{-0{,}03(5)}$$

$V(5) = 1204991{,}2$ es el valor después de 5 años

Ejemplo 6.6

La población del planeta al inicio de 1976 era de 4 mil millones y ha crecido a un 2% anual. ¿Cuál será la población al inicio del año 2010, suponiendo que la tasa de crecimiento no se modifique?

SOLUCIÓN:

Como la tasa de crecimiento es 2% en tanto por uno tendríamos 0,02 por lo tanto:

$f = 1$

$i = 0{,}02$

$n = 34$
$P = 4\, mil\, millones$

$$F = P(1+i)^n$$

$$F = 4000\ millones\,(1+0{,}02)^{34}$$

$$F = 4000\,(1{,}02)^{34}\ millones$$

$$F = 7842{,}70\, millones$$

Es decir la población en el 2100 será de 7,84 mil millones de habitantes.

Ejemplo 6.7

La población de cierta ciudad al instante t medido en años está dada por $F(t) = Pe^{0,03t}$ $\quad P = 1{,}5 millones$, ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento en el año?

SOLUCIÓN:

Después de n años la población es:

$$F = P(1+i)^n \qquad F(t) = Pe^{0,03t}$$

$$P(1+i)^n = P \cdot e^{0,03n}$$

$$(1+i)^n = e^{0,03n}$$

$$(1+i) = e^{0,03}$$

$$1 + i = 1{,}0305$$

$$i = 0{,}0305$$

Por lo tanto la población crece al 3,05%

Ejemplo 6.8

Encuentre la tasa de interés anual efectiva que es equivalente al 8% de la tasa nominal de capitalización trimestral.

SOLUCIÓN:

$f = 4$ porque existe 4 trimestres en el año
$j = 0,08$ tasa nominal en tanto por uno

$$1 + i = \left(1 + \frac{j}{f}\right)^f$$

$$1 + i = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4$$

$$1 + i = 1,082432$$

$$i = 0,08243$$

Por lo tanto la tasa efectiva es de 8,243 %

6.2. LOGARITMOS

Dado como base un número a, real positivo y diferente de uno, se llama logaritmo de un número real y positivo N con respecto a dicha base, al exponente y al cual se debe elevar la base a para obtener el número N.

Notación exponencial	Notación logarítmica
$a^y = N$	$\log_a N = y$
$2^x = 64$	$\log_2 64 = x$
$3^y = 27$	$\log_3 27 = y$
$b^p = a$	$\log_b a = p$

* La función logarítmica es $y = \log_a x$

* Los logaritmos de base 10 se llaman logaritmos decimales, vulgares o de briggs y se escribe como:

$$\log_{10} N = \log N$$

* Los logaritmos de base el número irracional $e = 2{,}71828...$ reciben el nombre de naturales, hiperbólicos o neperianos y se escribe como:

$$\log_e N = \ln N$$

6.2.1. PROPIEDADES DE LOS LOGARÍTMOS

1) El logaritmo de 1 de cualquier base es igual a cero

$$\log_a 1 = 0$$

2) El logaritmo de cualquier número positivo con la misma base es siempre 1

$$\log_a a = 1$$

3) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos se sus factores

$$\log_a (N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$$

4) El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador

$$\log_a \left(\frac{N}{M} \right) = \log_a N - \log_a M$$

5) El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_a N^m = m \log_a N$$

6) El logaritmo de un radical es igual al logaritmo de la cantidad subradical sobre el índice del radical.

$$\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{\log_a N}{m}$$

Ejemplo 6.9

Escriba la expresión $\log x + \log 5 - \log y$ como un solo logaritmo:

$$\log x + \log 5 - \log y = \log(x+5) - \log y$$

$$= \log \frac{(x+5)}{y}$$

Ejemplo 6.10

Encuentre el valor de x en la ecuación $\log_x (6-x) = 2$

SOLUCIÓN:

La ecuación $\log_x (6-x) = 2$ escribimos en forma de potencia

$$x^2 = 6 - x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x+3=0 \qquad x-2=0$$

$$x=-3 \qquad x=2$$

Por lo tanto la solución es -3 y 2

Ejemplo 6.11

Resuelva la ecuación

$$\log_3 3 + \log_3 (x+1) - \log_3 (2x-7) = 4$$

SOLUCIÓN:

$$\log_3 3 + \log_3(x+1) - \log_3(2x-7) = 4$$
$$1 + \log_3(x+1) - \log_3(2x-7) = 4$$
$$\log_3(x+1) - \log_3(2x-7) = 3$$
$$\log_3(x+1) - \log_3(2x-7) = \log_3 27$$
$$\log_3 \frac{x+1}{2x-7} = \log_3 27$$
$$\frac{x+1}{2x-7} = 27$$
$$x+1 = 54x - 189$$
$$x - 54x = -189 - 1$$
$$-53x = -190$$
$$x = \frac{190}{53}$$

Ejemplo 6.12

Encuentre x en la ecuación:
$\log(4x-3) = \log(x+1) + \log 3$

SOLUCIÓN:

$$\log(4x-3) = \log(x+1) + \log 3$$
$$\log(4x-3) = \log 3(x+1)$$
$$(4x-3) = 3(x+1)$$
$$4x - 3 = 3x + 3$$
$$4x - 3x = 3 + 3$$
$$x = 6$$

Ejemplo 6.13

Una compañía encuentra que la cantidad de dólares y, que debe gastar semanalmente en publicidad para vender x unidades de su producto esta dado por:

$$y = 200\ln\left(\frac{400}{500-x}\right)$$

Calcule el gasto publicitario que se deberá hacer para vender 300 unidades.

SOLUCIÓN:

Como se necesita encontrar el gasto para vender 100 unidades se tiene que x=300, por tanto

$$y = 200\ln\left(\frac{400}{500-x}\right)$$

$$y = 200\ln\left(\frac{400}{500-300}\right)$$

$$y = 200\ln\left(\frac{400}{200}\right)$$

$$y = 138{,}63$$

La inversión por vender 300 unidades es de 138,63 dólares

6.3 APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS

Los logaritmos se aplica en la resolución de ecuaciones que contiene la incógnita en el exponente.

Ejemplo 6.14

Encuentre el valor de x en la ecuación $2^x = 25$

SOLUCIÓN:

Para resolver una ecuación de esta forma se aplica logaritmos a los dos lados de la ecuación luego las propiedades

$$2^x = 25$$
$$\log 2^x = \log 25$$
$$x \log 2 = \log 25$$
$$x = \frac{\log 25}{\log 2}$$
$$x = 4{,}6439$$

Ejemplo 6.15

Determine el valor de x en la ecuación $\left(3^x\right)^2 = 2\sqrt{2^x}$

SOLUCIÓN:

$$\left(3^x\right)^2 = 2\sqrt{2^x}$$
$$3^{2x} = 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$$
$$\log 3^{2x} = \log 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$$
$$2x \log 3 = \log 2 + \frac{x}{2} \log 2$$
$$2x \log 3 - \frac{x}{2} \log 2 = \log 2$$
$$4x \log 3 - x \log 2 = 2 \log 2$$
$$x\left(4 \log 3 - \log\right) = 2 \log 2$$
$$x = \frac{2 \log 2}{4 \log 3 - \log 2}$$
$$x = 0{,}375$$

Ejemplo 6.16

Un comerciante de bienes inmuebles posee una propiedad que podría vender por $100000. También podría conservar la propiedad durante 5 años, durante ese tiempo, gastaría $ 100000 en mejorarla y la vendería entonces en $300000, Supóngase que el costo de las mejoras sería gastado en una sola exhibición al término de 3 años y debería tomarse en préstamo del banco a un interés del 12% anual. Si se supone que la tasa de interés es del 10%. Calcule el valor presente de esta segunda alternativa y decida cual de las dos posibilidades representa la mejor estrategia para el comerciante.

SOLUCIÓN:

Consideremos el dinero que debe tomar a préstamo para mejorar la propiedad.

$f = 1$

$P = 100000$

$i = 0{,}12$

$n = 2$

$$F = P(1+i)^n$$

$$F = 100000\ (1+0{,}12)^2$$

$$F = 125440$$

Por lo tanto los ingresos netos de la venta después de liquidad el préstamo serán de

$$300000 - 125440 = 174560$$

Este ingreso lo recibirá dentro de 5 años, por lo tanto obtendremos el valor presente.

$f = 1$

$F = 174560$

$$F = P(1+i)^n$$

$i = 0{,}10$ $\quad\quad$ $P = \dfrac{174560}{(1+0{,}10)^5}$

$n = 5$ $\quad\quad$ $P = 108388{,}03$

Dado el valor presente de la segunda opción con el de la venta inmediata de $100000, es mejor conservar y mejorar la propiedad para venderla dentro de 5 años.

Ejemplo 6.17

Se invierte $1000 a un interés compuesto anual de 8%, ¿Cuánto se tardará en incrementarse a $1500?

SOLUCIÓN:

$F = 1500$

$P = 1000$

$f = 1$

$i = 0{,}08$

$$F = P(1+i)^n$$

$$1500 = 1000(1+0{,}08)^n$$

$$\frac{1500}{1000} = (1{,}08)^n$$

$$\log 1{,}5 = n \log 1{,}08$$

$$\frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}08} = n$$

$$n = 5{,}2684$$

Para incrementar de 1000 dólares a 1500 dólares se tardaría 5,2684 años.

Ejemplo 6.18

El volumen de ventas de cierto producto está creciendo 12% anualmente. Si el actual volumen es de 500 unidades diarias, ¿En cuánto tiempo se alcanzará la cifra de 800 dólares?

SOLUCIÓN:

$P = 500$

$$F = P(1+i)^n$$

$F = 800$

$$800 = 500(1+0{,}12)^n$$

$i = 0{,}12$

$$\log 1{,}6 = n \log 1{,}12$$

$n = 4{,}15$ años

EJERCICIOS PROPUESTOS
Autoevaluación 6

1. Construya las graficas de las funciones exponenciales siguientes calculando algunos de sus puntos:

a) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

b) $y = 3^{-x}$

2. Si $100 se invierten a un interés compuesto anual del 8% calcule lo siguiente:

a) El valor de la inversión después de 5 años

b) El valor de la inversión después de 10 años

3. Encuentre la tasa de interés anual efectiva que sea equivalente a:

a.6% de la tasa nominal de capitalización semestral:

b.8% de la tasa nominal de capitalización trimestral:

c.12% de la tasa nominal de capitalización mensual:

d.12% de la tasa nominal de capitalización 6 veces al año:

4. Encuentre la tasa de interés nominal anual que corresponde a una tasa efectiva de:

a) 8.16% compuesta semestralmente

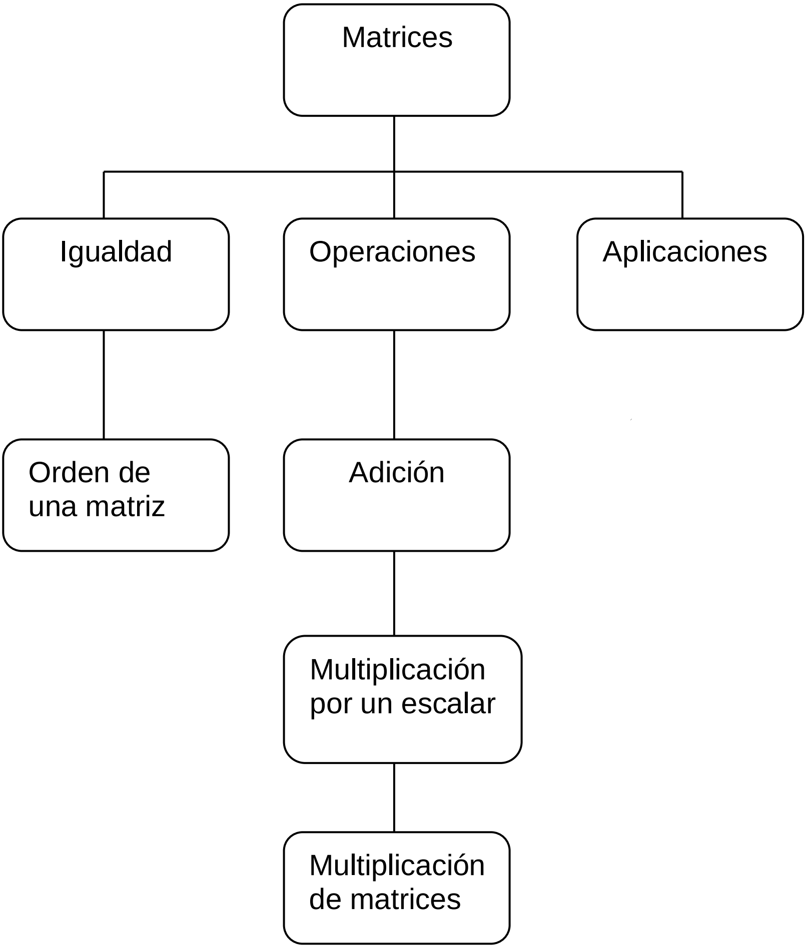
b) 12.55% compuesta trimestralmente

c) 10% compuesta mensualmente

d) 9% compuesta 6 veces al ano

U N I D A D 7
ÁLGEBRA DE MATRICES

Estudiar matrices simplifica y generaliza los problemas y ecuaciones que necesitan las empresas.



7.1. MATRICES

Una matriz es un arreglo rectangular de números dispuestos en filas y columnas.

Los números que forman la matriz se llaman componentes o elementos de la matriz y están encerrados en corchetes, paréntesis o doble barra y se representará los elementos con letras minúsculas, mientras que las matrices se representan con letras mayúsculas. Ejemplos de matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 8 & -1 & -4 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

7.1.1 ORDEN DE UNA MATRIZ

El orden de una matriz es el número de filas y columnas y está escrita en la parte inferior derecha de la matriz.

Si una matriz tiene m filas y n columnas se dice que es de orden mxn. La forma general de la matriz de orden mxn es:

Diagonal secundaria

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Filas

Columnas

Diagonal principal

7.1.2. IGUALDAD DE MATRICES

Se dice que dos matrices son iguales si son del mismo amaño y sus elementos correspondientes son iguales

Ejemplo 7.1

Sean: $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ y & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & 5 & 3 \\ 0 & b & 4 \end{pmatrix}$

Podemos observar que las matrices son del mismo tamaño, y $A = B$ si y solo si $a = 2, x = 5, y = 0, b = -1$

EJEMPLO 7.2

Determine los valores de las variables para los cuales la ecuación matricial siguiente es válida

$$\begin{pmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 4 & y-1 & 5 \\ u & -1 & z+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & t+1 & 3 \\ v+1 & -3 & 5 \\ -4 & w-1 & 2z-1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Para que las matrices sean iguales sus elementos deben ser iguales:

$x+1=2x-1$
$x-2x=-1-1$
$-x=-2$
$x=2$

$2=t+1$
$2-1=t$
$1=t$
$t=1$

$4=v+1$

$4-1=v$
$3=v$
$v=3$

$y-1=-3$

$y=-3+1$
$y=-2$

$u=-4$

. $-1=w-1$
$-1+1=w$
$0=w$
$w=0$

$z+2=2z-1$
$z-2z=-1-2$
$-z=-3$
$z=3$

Por lo tanto $x=2$, $t=1$, $v=3$, $y=-2$, $u=-4$, $w=0$, $z=3$, para que las matrices sean iguales.

7.2 OPERACIONES CON MATRICES

7.2.1 ADICIÓN DE MATRICES

Si *A* y *B* son dos matrices de igual tamaño mxn se puede sumar elemento a elemento obteniéndose una nueva matriz de orden $m x n$.

En forma extensa sean:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \ldots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

En forma corta:

Sean $A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$ $B=\left(b_{ij}\right)_{mxn}$ entonces la suma de las matrices es $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{mxn}$

Ejemplo 7.3

Hallar la suma de las matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN:

$$A+B=\begin{pmatrix} 5-9 & 2+0 \\ 8+3 & 4+5 \end{pmatrix}$$
$$A+B=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$$

7.2.2. PRODUCTO POR UN ESCALAR

La multiplicación de un escalar (número real) por una matriz se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz por el escalar

En forma extensa: sea k un escalar y la matriz es

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Entonces:

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

En forma corta:

Si $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ es una matriz, y k es un número real, entonces $kA = \left(ka_{ij}\right)_{mxn}$

Ejemplo 7.4

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ se sigue que:

$$3A = \begin{pmatrix} 3(5) & 3(6) & 3(2) \\ 3(2) & 3(-4) & 3(-1) \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 6 \\ 6 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.5

Efectuar la operación siguiente $3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN:

Primero realizamos las multiplicaciones y luego la suma

$$3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 9 \\ 13 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 3 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}$$

Una empresa produce tres tamaños de cintas magnetofónicas en dos calidades diferentes. La producción en miles de su planta de Quito está dada por la matriz siguiente

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \text{Tamaño1} & \text{tamaño2} & \text{tamaño3} \end{array} \\ \begin{array}{l} calidad\,1 \\ calidad\,2 \end{array} & \begin{pmatrix} 27 & 36 & 30 \\ 18 & 26 & 21 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

La producción en miles en su planta de Guayaquil está dada por la matriz siguiente:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \text{Tamaño1} & \text{tamaño2} & \text{tamaño3} \end{array} \\ \begin{array}{l} calidad\,1 \\ calidad\,2 \end{array} & \begin{pmatrix} 32 & 40 & 35 \\ 25 & 38 & 30 \end{pmatrix} = B \end{array}$$

a) Escriba una matriz que represente la producción total de cintas en ambas plantas.
b) El dueño de la empresa planea abrir una tercera planta en Bogotá, la cual tendría una vez y media la capacidad de la planta de Quito, escriba la matriz que representa la producción en Bogotá.
c) Si la producción en Guayaquil se incrementa en un 20%, encuentre la matriz que representa esta nueva producción.
d) ¿Cuál será la producción total de las tres plantas?

SOLUCIÓN:

a) Para escribir la producción total de las dos plantas, solo tendremos que sumar sus producciones

$$A+B=\begin{pmatrix}27 & 36 & 30\\ 18 & 26 & 21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}32 & 40 & 35\\ 25 & 38 & 30\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}59 & 76 & 65\\ 43 & 64 & 51\end{pmatrix}$$

(Por ejemplo producen 59 mil cintas de tamaño 1 y calidad 1, o 64 mil de tamaño 2 y calidad 2)

b) Para hallar la matriz de producción de la planta de Bogotá, como tiene capacidad de una vez y media de la planta de Quito, entonces multiplicamos por 1,5 la matriz de producción de Quito.

$$1{,}5A=1{,}5\begin{pmatrix}27 & 36 & 30\\ 18 & 26 & 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40{,}5 & 54 & 45\\ 27 & 39 & 31{,}5\end{pmatrix}=C$$

Los decimales no quiere decir que se va ha producir media cinta, no debemos olvidarnos que está en miles, es así que en Bogotá se va ha producir 31500 cintas del tamaño3 y calidad2

c) Si la producción en Guayaquil se incremento en un 20% quiere decir que para hallar la nueva matriz con incremento se debe multiplicar por 1,20 a la matriz de producción de Guayaquil.

$$1{,}20\begin{pmatrix}32 & 40 & 35\\ 25 & 38 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38{,}4 & 48 & 42\\ 30 & 45{,}6 & 36\end{pmatrix}=D$$

d) Para hallar la producción total de las tres plantas se debe sumar las tres matrices de las últimas producciones de las plantas.

$$A+C+D=\begin{pmatrix}27 & 36 & 30\\ 18 & 26 & 21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}40{,}5 & 54 & 45\\ 27 & 39 & 31{,}5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}38{,}4 & 48 & 42\\ 30 & 45{,}6 & 36\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 105{,}9 & 138 & 117 \\ 75 & 110{,}6 & 88{,}5 \end{pmatrix}$$

Significa que en las tres plantas produciría 138 mil cintas de tamaño 2 y calidad 1, entre otros datos.

7.2.3. MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Para que el producto de matrices esté definido, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz, la matriz resultante es de orden igual al número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda matriz.

Sean las matrices *A* de orden mxn, y la matriz *B* de orden nxk, la multiplicación de estas dos matrices se denota por *AB* siendo de orden mxk.

Para multiplicar matrices ***AB*** se utiliza la primera fila de la matriz *A*, y la primera columna de la matriz *B*, multiplicando el primer elemento de la fila de la matriz *A* y el primer elemento de la columna de la matriz *B*, luego los segundos elementos se multiplican a la vez se hace lo mismo con todos los elementos y luego se suma estos productos, obteniéndose la primera componente de la matriz producto *AB,* luego se utiliza la primera fila de la matriz *A* y la segunda columna de la matriz *B* obteniéndose la segunda componente, este proceso se repite con cada fila de la matriz *A* y cada columna de la matriz *B.* hasta obtener la matriz *AB* de orden mxk.

Ejemplo 7.6

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Hallar *AB*

SOLUCIÓN:

El proceso que sigue es el de multiplicación de dos matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 2(3)-3(1)+5(-4) & 2(2)-3(5)+5(7) & 2(1)-3(1)+5(1) & 2(0)-3(0)+5(0) \\ -1(3)+2(1)+3(-4) & -1(2)+2(5)+3(7) & -1(1)+2(1)+3(1) & -1(0)+2(0)+3(0) \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 6-3-20 & 4-15+35 & 2-3+5 & 0+0+0 \\ -3+2-12 & -2+10+21 & -1+2+3 & 0+0+0 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} -17 & 24 & 4 & 0 \\ -13 & 29 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.7

Dadas las matrices $T=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}_{4x2}$ $\quad S=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2x3}$ Hallar TS

SOLUCIÓN:

$$TS=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$TS=\begin{pmatrix} 2\cdot 0+0\cdot 1 & 2\cdot 4+0(-3) & 2\cdot 1+0\cdot 3 \\ 1\cdot 0-3\cdot 1 & 1\cdot 4-3(-2) & 1\cdot 1-3\cdot 3 \\ 0\cdot 0-1\cdot 1 & 0\cdot 4-1(-2) & 0\cdot 1-1\cdot 3 \\ -2\cdot 0+2\cdot 1 & -2\cdot 4+2(-2) & -2\cdot 1+2\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$TS=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ -3 & 10 & -8 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -12 & 4 \end{pmatrix}_{4x3}$$

Ejemplo 7.8

Una empresa fabrica dos productos I y II, usando diferentes cantidades de las tres materias primas P,Q y R. Sean las unidades de materias primas usadas en los productos dadas por la matriz siguiente.

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} P & Q & R \end{array} \\ \begin{array}{l} producto1 \\ producto2 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

supongamos que la empresa produce estos dos productos en dos plantas, X; Y. Sean los costos de las materias primas por unidad en las dos localidades X,Y y están dadas por la matriz

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{cc} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{array} \\ \begin{array}{l} P \\ Q \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = B \end{array}$$

Hallar los costos totales de materias primas para los dos productos, elaborados en ambas plantas.

SOLUCIÓN:
Los costos totales se encuentran multiplicando la matriz *A*, con la matriz *B*

$$AB = \begin{pmatrix} 30+16+24 & 36+14+20 \\ 20+40+6 & 24+35+5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 70 & 70 \\ 66 & 64 \end{pmatrix} \begin{array}{l} producto1 \\ producto2 \end{array}$$

X Y

Es decir que la materia prima del producto 1 en la planta X tiene un costo de $70, o que el costo de la materia prima para el producto 2 en la planta Y es de $64

7.3 SOLUCIÓN DE SISITEMAS LINEALES POR REDUCCIÓN DE RENGLONES (MÉTODO DE GAUSS JORDAN)

Un sistema de m filas con n columnas es de la siguiente forma:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_m = b_m \end{matrix}$$

La matriz del sistema está formada por los coeficientes de las incógnitas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

La matriz aumentada está formada por los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes.

$$A=\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Este método consiste en llevar la matriz aumentada del sistema a matriz escalonada reducida mediante las operaciones elementales que transforman un sistema en otro equivalente es decir que tienen el mismo conjunto solución.

7.3.1. MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA

Se llama matriz escalonada reducida cuando el primer número inicial de cada fila es, es el único elemento diferente de cero en su columna. Como la siguiente:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0\dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0\dots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1\dots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_m \end{array}\right)$$

7.3.2 OPERACIONES ELEMENTALES

Cuando sobre las filas de una matriz se realiza una o más de las siguientes operaciones, la matriz obtenida es equivalente a la original, son las siguientes operaciones:

a) Intercambiar dos filas de una matriz
b) Multiplicar o dividir una fila por un número diferente de cero
c) Sumar o restar una fila con otra y ese resultado reemplazar por cualquiera de las dos filas.

Ejemplo 7.9

Resolver el sistema $\begin{matrix} 3x-2y=4 \\ x+3y=5 \end{matrix}$

La matriz aumentada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

A ésta matriz debemos transformarle en matriz escalonada reducida para lo cual realizamos las siguientes operaciones

a) multiplicamos la fila 2 por -3 y sumamos a la fila1, éste resultado reemplaza a la fila 2 $\left(-3F_2+F_1 \mapsto F_2\right)$

-3	-9	-15
3	-2	4
0	-11	-11

La matriz obtenida es $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 4 \\ 0 & -11 & -11 \end{array}\right)$

b) Luego hacemos cero al -2 en la primera fila para eso multiplicamos por 2 a la segunda fila y a la primera por -11 para luego sumar estos dos resultados y reemplazar en la primera fila. $\left(2F_2-11F_1 \mapsto F_1\right)$

0	-22	-22
-33	22	-44

-33 0 -66

Obteniéndose la matriz $\left(\begin{array}{cc|c} -33 & 0 & -66 \\ 0 & -11 & -11 \end{array}\right)$

c) Para obtener unos , dividimos la primera fila para -33 y la segunda fila para -11 $\left(\frac{F_1}{-33} \mapsto F_1 \qquad \frac{F_2}{-11} \to F_2\right)$

Obteniéndose la matriz: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Es evidente que los valores de las incógnitas son:

$x = 2, \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad P(2,1)$

Ejemplo 7.10

Halle los valores de x, y, z en el siguiente sistema.

$2x + y - z = -1$

$x + 4y + 3z = 10$

$-6x + 4y + 9z = 30$

SOLUCIÓN:

La matriz aumentada del sistema sería:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 10 \\ -6 & 4 & 9 & 30 \end{array}\right)_{\substack{F_1-2F_2\mapsto F_2 \\ 3F_1+F_3\to F_3}} \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & 7 & 6 & 27 \end{array}\right)_{\substack{F_2+7F_1\to F_1 \\ F_2+F_3\to F_3}}$$

$$\cong \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & -14 & -28 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)_{\substack{14F_3-F_1\to F_1 \\ 7F_3-F_2\to F_2}} \cong \left(\begin{array}{ccc|c} -14 & 0 & 0 & 112 \\ 0 & 7 & 0 & 63 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)_{\substack{\frac{F_1}{-14}\to F_1 \\ \frac{F_2}{7}\to F_2 \\ \frac{F_3}{-1}\to F_3}}$$

$$\cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

Por lo tanto $x=8,\ y=9,\ z=-6$ entonces es el punto $(8,9,-6)$

EJERCICIOS PROPUESTOS
Autoevaluación 7

1. Efectuar las operaciones indicadas:

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

2. Determine los valores de las variables para las cuales las ecuaciones matriciales siguientes son válidas:

a) $3\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & y & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 & t & 0 \\ z & 1 & -1 \\ u & 2 & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w-4 & 1 & -v \\ 4 & 2u & 2x+y \\ -1 & x+7 & 12 \end{bmatrix}$

3. Efectuar las operaciones indicadas:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. En los problemas siguientes resuelva el sistema dado si la solución existe usando el método de reducción de renglones (Método de Gauss Jordán):

a)
$$\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ 2x-y+3z&=9 \\ -x+2y+z&= \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x+2y-z&=-3 \\ 3y+4z&=5 \\ 2x-y+3z&=9 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Jagdish C. Arya/ Robin Lardner, Matemática Aplicada a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas,

2. Carl B. Allendoerfer, Matemática Universitaria, México, McGraw-Hill

3. Eduardo Espinoza Ramos, Matemática Básica, Perú,

4. Edwin Galindo, Matemática Superior, Ecuador, Sigma Editores

-Editorial-

CILADI

Centro de Investigación Latinoamericano para el Desarrollo e Innovación

ISBN: 978-9942-7078-6-4