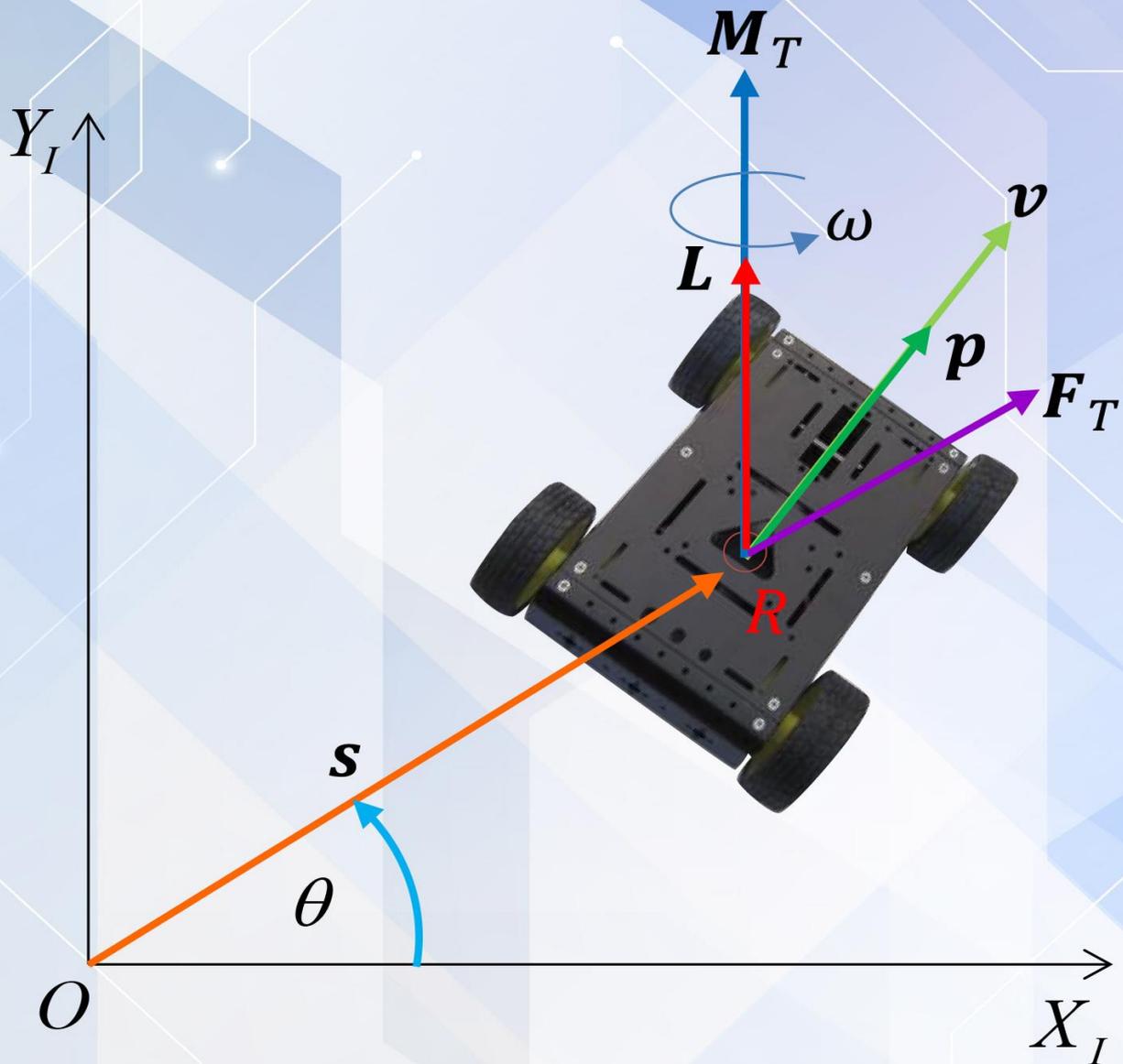


# Cinemática y Dinámica de Robots Móviles con Ruedas



Junior Figueroa  
William Montalvo  
Marcia Bayas



# **Cinemática y Dinámica de Robots Móviles con Ruedas**

Primera edición: Marzo 2023

Ediciones

ISBN: 978-9942-7078-3-3

Este texto ha sido sometido  
a evaluación de pares externos  
con base en la normativa de la editorial.

Editor general: Antonio Poveda G.

## **Autores**

Mgt. Junior Rafael Figueroa Olmedo,

Mgt. William Manuel Montalvo López,

Dra. Sc. Marcia Marisol Bayas Sampedro

Dedicado a nuestros familiares  
y a nuestros estudiantes



## Contenido

<b>Prólogo.....</b>	<b>10</b>
<b>Capítulo 1: Generalidades de Robótica Móvil .....</b>	<b>12</b>
1.1 Introducción	12
1.2 Conceptos Previos	13
1.2.1 Definición de Robot	15
1.2.2 Clasificación General de los Robots	18
1.3 Componentes de un Sistema Robótico	21
1.3.1 Sistema Mecánico	22
1.3.2 Sistema de Actuación	23
1.3.3 Sistema de Sensado	25
1.3.4. Sistema de Control	26
1.4. Robots Móviles	26
1.4.1 Definiciones de Robots Móviles	27
1.4.2 Funcionamiento del Robot Móvil	28
1.4.2.1 Desplazamiento (Actuar)	28
1.4.2.2 Conocimiento del Entorno (Sentir)	29
1.4.2.3 Interacción y Adaptación con el Entorno (Pensar)	30
1.4.3 Arquitectura del Robot Móvil	30
1.4.4 Clasificación General de los Robots Móviles	32
1.4.4.1 Robots Móviles con Patas	33
1.4.4.2 Robots Móviles con Ruedas	34
1.4.4.3 Robots Móviles con Orugas	35
1.4.4.4 Robots Terrestres Híbridos	36
1.4.4.5 Robots Móviles Aéreos	36
1.4.4.6 Robots Móviles Acuáticos	37
1.4.4.7 Robots Móviles Híbridos	39
1.5 Evolución y Antecedentes Históricos	39
1.6 Aplicaciones Actuales	52
1.6.1 Logística en Almacenes Automáticos	54
1.6.2 Instalaciones Médicas Hospitalarias	57
1.6.3 Información y Atención al Cliente	58
1.6.4 Sector Agrícola	59

1.6.5 Transporte y Entrega de Mercancías	61
1.6.6 Limpieza	63
1.6.7 Exploración y Manipulación en Entornos Riesgosos	64
1.6.8 Mantenimiento y Reparación de Aeronaves	66
1.6.9 Robótica Educativa	67
1.6.10 Aplicaciones y Expectativas Futuras	68
<b>Capítulo 2: Locomoción de Robots Móviles con Ruedas .....</b>	<b>72</b>
2.1 Introducción	72
2.2 Locomoción mediante Ruedas	73
2.3 Tipos de Ruedas	74
2.3.1 Ruedas Convencionales o Estándar	74
2.3.2 Ruedas Especiales u Omnidireccionales	76
2.4 Configuraciones Según las Ruedas	79
2.4.1 Robots con Una Rueda	80
2.4.2 Robots con Dos Ruedas	81
2.4.3 Robots con Tres Ruedas	82
2.4.3.1 Robot con Accionamiento Diferencial	83
2.4.3.2 Robot con Configuración Triciclo	85
2.4.3.3 Robot con Accionamiento Sincrónico	87
2.4.3.4 Robot Omnidireccional con Ruedas Universales	89
2.4.3.5 Robot Omnidireccional con Ruedas Castor	90
2.4.3.6 Robot Omnidireccional con Ruedas Orientables Centradas	91
2.4.4 Robots con Cuatro Ruedas	92
2.4.4.1 Robot con Sistema Direccional Ackermann	92
2.4.4.2 Robot con Accionamiento Diferencial	94
2.4.4.3 Robot con Dirección Deslizante	95
2.4.4.4 Robots Omnidireccionales con Cuatro Ruedas	96
2.5 Locomoción mediante Orugas	101
2.6 Locomoción Híbrida Terrestre	104
<b>Capítulo 3: Modelamiento Cinemático y Dinámico .....</b>	<b>107</b>
3.1 Introducción	107
3.2 Cinemática de los Robots Móviles	108

3.2.1 Representación de la Posición y Orientación	109
3.2.2 Cinemática Directa e Inversa del Robot	111
3.2.3 Restricciones Cinemáticas de las Ruedas	113
3.2.3.1 Rueda Convencional Fija	115
3.2.3.2 Rueda Convencional Orientable Centrada o Direccional	119
3.2.3.3 Rueda Convencional Orientable Descentrada	120
3.2.3.4 Rueda Especial Sueca o Mecanum	122
3.2.3.5 Rueda Especial Esférica	127
3.2.4 Modelo Cinemático de Postura del Robot	129
3.2.4.1. Formulación General	129
3.2.4.2 Robot con Ruedas Fijas y Orientables Centradas	132
3.2.4.3 Cinemática Directa e Inversa – Matriz Jacobiana	134
3.2.4.4 Centro Instantáneo de Rotación	136
3.2.5 Modelo Cinemático del Robot Diferencial	140
3.2.5.1 Análisis mediante las Ecuaciones de Restricción de las Ruedas	141
3.2.5.2 Análisis mediante el Centro Instantáneo de Rotación	145
3.2.5.3 Estimación de la Postura mediante Odometría	147
3.2.6 Modelo Cinemático del Robot Bicicleta	158
3.2.6.1 Análisis mediante las Ecuaciones de Restricción de las Ruedas	159
3.2.6.2 Análisis mediante el Centro Instantáneo de Rotación	162
3.2.6.3 Robot Bicicleta con Tracción de la Rueda Trasera	164
3.2.6.4 Estimación de la Postura mediante Odometría	168
3.2.7 Modelo Cinemático del Robot Triciclo	169
3.2.7.1 Análisis mediante las Ecuaciones de Restricción de las Ruedas	169
3.2.7.2 Análisis mediante el Centro Instantáneo de Rotación	173
3.2.8 Modelo Cinemático del Robot Ackermann	173
3.2.9 Modelo Cinemático del Robot Omnidireccional de Tres Ruedas	176
3.2.10 Modelo Cinemático del Robot Omnidireccional de Cuatro Ruedas	180
3.3 Maniobrabilidad del Robot Móvil	185
3.3.1 Grado de Movilidad	186

3.3.2 Grado de Direccionalidad	189
3.3.3 Grado de Maniobrabilidad	190
3.4 Espacio de Trabajo y Restricciones de Movimiento	193
3.4.1 Grados de Libertad	194
3.4.2 Restricciones Holonómicas y No Holonómicas	195
3.4.3 Consideraciones de las Rutas y Trayectorias	199
3.5 Modelo Cinemático de Configuración	203
3.5.1 Representación del Modelado Cinemático en la Forma Pfaffian	204
3.5.2 Modelo Cinemático del Robot Monociclo	210
3.5.3 Modelo Cinemático del Robot con Accionamiento Diferencial	212
3.5.4 Modelo Cinemático del Robot Bicicleta, Triciclo y Ackermann	216
3.5.5 Modelo Cinemático del Robot Omnidireccional de Cuatro Ruedas	221
3.6 Dinámica de los Robots Móviles	223
3.6.1 Parámetros Generales para el Modelado Dinámico	226
3.6.2 Modelo Dinámico de un Sistema Móvil con Restricciones	231
3.6.3 Modelo Dinámico de un Sistema Móvil en el Espacio de Estados	235
3.6.4 Modelo Dinámico para Robots Móviles con Ruedas	238
3.6.5 Modelo Dinámico del Robot Diferencial	243
3.6.6 Modelo Dinámico Alternativo del Robot Diferencial	252
3.6.7 Modelo Dinámico del Robot Omnidireccional de Tres Ruedas	259

## Prólogo

La robótica ha influido significativamente en el desarrollo de la sociedad a lo largo del tiempo. El campo de la robótica requiere la colaboración de numerosas disciplinas científicas, incluidas la ingeniería mecánica, la ingeniería eléctrica y electrónica, la ingeniería de control, la ingeniería informática, la ingeniería de sensores y la automatización. La mayoría de los robots móviles en este campo son propulsados por ruedas. Se aplican donde los humanos nunca han estado (como en otros planetas), donde no pueden estar (como en áreas peligrosas o contaminadas) y donde los humanos necesitan apoyo y asistencia los robots móviles con ruedas dejan rastros.

Los robots móviles son útiles en caso de desastre, ya que pueden usarse para reconocimiento, detección de materiales peligrosos y actividades de rescate. Como limpiadores de pisos y cortadoras de césped robóticas, estos robots ya se han abierto camino en nuestros hogares así como en numerosas instalaciones industriales como vehículos guiados de forma autónoma. Además, se utilizan como prototipos para automóviles autónomos en el tráfico normal, y se espera que en un futuro próximo surgirán muchas aplicaciones nuevas para robots móviles autónomos con ruedas, algunas de las cuales pueden ser inesperadas.

Este libro proporciona una descripción completa y unificada de los robots móviles con ruedas. Se presentan varios modelos cinemáticos y dinámicos requeridos para el diseño de leyes de control basados en modelos matemáticos y se discuten temas relacionados con la actuación (motores) y detección (sensores y medidas) de sus estructuras. Una de las fortalezas clave del libro es su enfoque en las aplicaciones prácticas en las que se incluyen soluciones y extractos de listas de códigos de Matlab. Estas listas de código guían al lector para que pruebe, evalúe y modifique los algoritmos en sus respectivos campos.

En general, "Cinemática y dinámica de robots móviles con ruedas" es un recurso indispensable para cualquier persona interesada en el modelado matemático de robots móviles. Ofrece una introducción completa a los conceptos fundamentales de cinemática, dinámica y control y los aplica a los desafíos únicos que plantean los robots móviles con ruedas. Cada capítulo está escrito de una manera accesible. En el Capítulo 1 se examina el estado actual del arte de varias consideraciones de diseño para robots móviles, definiciones básicas y generales, y los

desarrollos tecnológicos más significativos que han contribuido al cuerpo de conocimiento en este campo. La estrategia de locomoción de los robots móviles terrestres basados en ruedas se examina con mayor detalle en el Capítulo 2, con algunos aspectos generales de locomoción sobre orugas y configuraciones híbridas que involucran ruedas discutidas al final del capítulo. Además, se describe el funcionamiento de los diferentes tipos de ruedas utilizadas en la construcción de robots móviles, así como las configuraciones cinemáticas en el diseño de estos robots, y ejemplos de aplicaciones prácticas desarrolladas hasta la fecha. En el Capítulo 3 presenta la notación matemática para expresar el movimiento de los robots móviles con ruedas en un marco de referencia global y su propio marco de referencia local. Se presenta la descripción formal y la combinación de las restricciones cinemáticas de los diversos tipos de ruedas individuales. Las restricciones cinemáticas de todo el robot se expresan mediante ecuaciones matriciales generales. Usando esta notación, se derivan modelos cinemáticos para robots móviles específicos, que describen el movimiento del robot en función de su geometría y el comportamiento de cada rueda. Finalmente, se estudian y determinan las ecuaciones dinámicas que gobiernan el movimiento de determinados robots móviles con ruedas. Estas ecuaciones se pueden usar para calcular la velocidad y la aceleración del robot y sus ruedas individuales.

# Capítulo 1

## Generalidades de Robótica Móvil

### 1.1 Introducción

La robótica es un campo interdisciplinario que combina la electrónica, la mecánica, la informática y otras ciencias para el diseño y la construcción de robots. Esta juega un papel importante en la educación, en la asistencia a personas mayores o discapacitadas, en actividades de servicio, entre otros sectores sociales y comerciales. Los robots son dispositivos programables que, con el avance de la tecnología son cada vez más sofisticados y capaces de interactuar de forma más natural con los humanos, pueden realizar una amplia variedad de tareas de forma autónoma o semiautónoma. Los modelos varían desde robots manipuladores, robots de entretenimiento y servicios hasta robots móviles utilizados en diferentes aplicaciones.

Los robots móviles pueden moverse de un lugar a otro de forma autónoma, es decir, sin ayuda de operadores humanos externos. A diferencia de la mayoría de los robots industriales manipuladores que sólo pueden moverse en un espacio de trabajo específico, los robots móviles tienen la característica especial de moverse libremente dentro de un espacio de trabajo predefinido para lograr sus objetivos deseados. Estas capacidades de movilidad los hacen adecuados para un amplio repertorio de aplicaciones en entornos estructurados y no estructurados [1-2].

Los estudios en robótica móvil se centran en la operación y gestión de vehículos total o parcialmente autónomos. Un número considerable de sistemas de robots móviles se emplean tanto en entornos domésticos como industriales, a pesar de que muchos de los sistemas de robots móviles actualmente activos se utilizan principalmente por motivos de investigación y, por lo tanto, son experimentales. La ausencia de un operador humano (a menudo debido a la inaccesibilidad), el costo potencialmente elevado, ciclos de trabajo prolongados y la necesidad de tolerar condiciones ambientales que podrían no ser aceptables para un ser humano son todas características de aplicaciones prácticas en las que los robots móviles se han implementado con

éxito [4-7]. En consecuencia, los robots móviles son especialmente apropiados para tareas que presentan una o más de las siguientes características [8]:

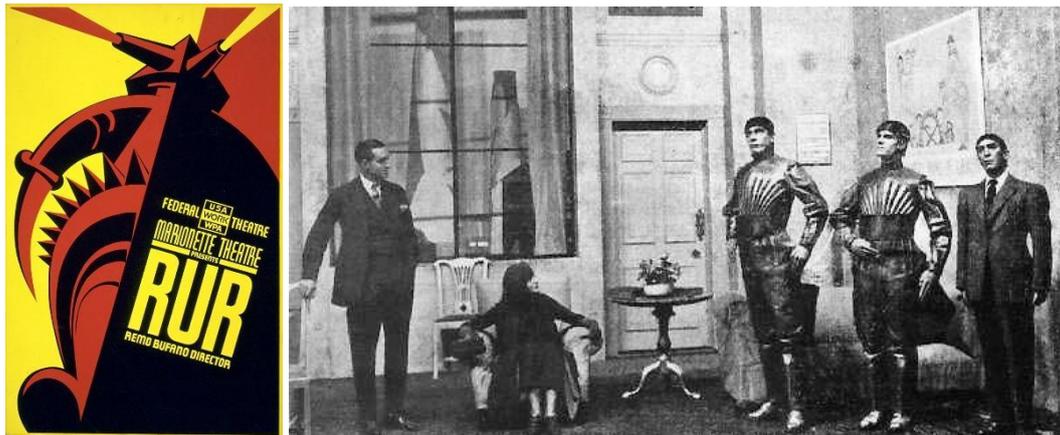
- En un entorno inhóspito, enviar a un ser humano es costoso o muy peligroso.
- En un entorno remoto, enviar un operador humano es demasiado difícil o lleva mucho tiempo. Las instancias extremas son dominios que son completamente inaccesibles para los humanos, como los entornos microscópicos.
- En una tarea con un ciclo de trabajo muy exigente o un factor de fatiga muy alto.
- En una tarea que es muy desagradable para un humano.

Los actuadores, procesadores, interfaces de usuario, sensores y mecanismos de comunicación que permiten que un robot móvil funcione deben ser integrados para que el sistema completo funcione como un todo. La estructura física de la mayoría de los robots móviles industriales, de servicio y de investigación es compleja y requiere una considerable inversión de recursos humanos y financieros para mantenerlo operativo [11-13].

El objetivo de este capítulo es presentar los conceptos generales y fundamentales de los robots móviles con ruedas, centrándose específicamente en las definiciones, clasificaciones y descripciones de los componentes de un robot. También proporciona una descripción general de los principales hitos históricos de la robótica y específicamente de la robótica móvil, y finalmente se describen algunas de las aplicaciones actuales de los robots móviles con ruedas en diversos campos, como el social, el industrial y el educativo, entre otros.

## 1.2 Conceptos Previos

La expresión robot proviene de la palabra checa *robota*, que significa “trabajos forzados” y fue utilizada por el escritor checo Karel Čapek en su obra de teatro *Rossum’s Universal Robots* estrenada en 1921 en la ciudad de Hradec Králové, en la cual unas máquinas orgánicas sustituyen al hombre en las tareas habituales [1].

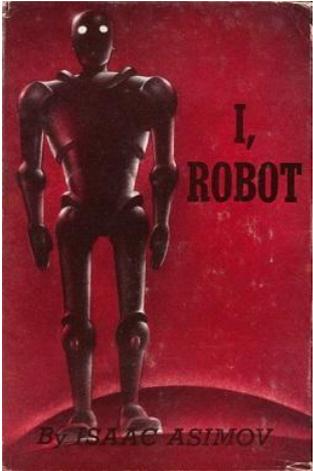


a)

b)

**Figura 1.1** a) Portada de la obra de teatro Rossum's Universal Robots, b) Escena de una representación [1].

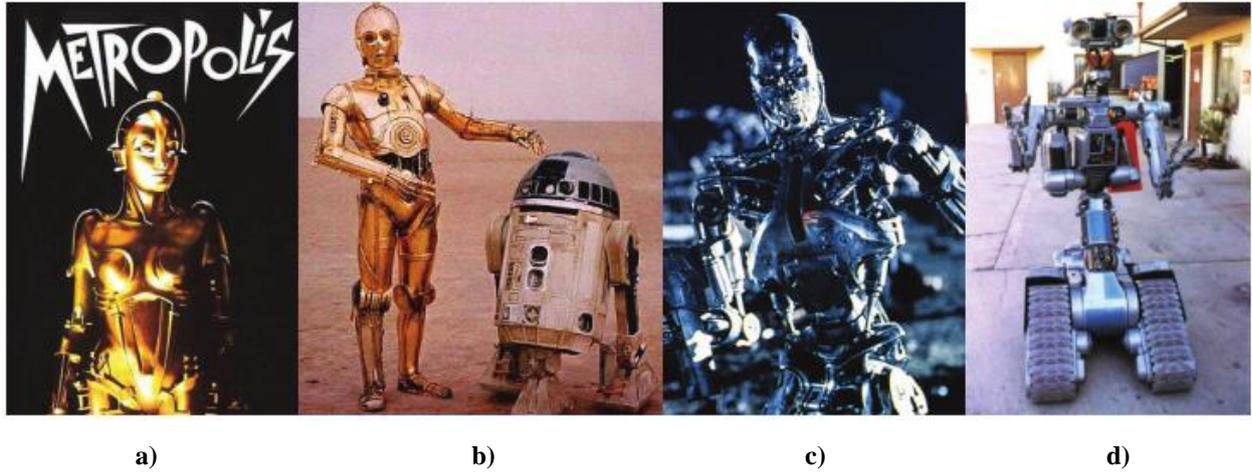
Por otro lado, la palabra robótica (en inglés, *robotics*) fue empleada en 1940 por el escritor de ciencia ficción Isaac Asimov, conocido como el creador de las tres leyes de la robótica (obsérvese la Figura 1.2) y autor de novelas tan relevantes como *Yo Robot* (1950), *Trilogía de la fundación* (1951) o *Robots e Imperio* (1985).



- ❖ **1ª Ley:** un robot no puede dañar a un ser humano o, por inacción, permitir que un ser humano sufra daño.
- ❖ **2ª Ley:** un robot debe obedecer las órdenes que le den los seres humanos excepto cuando dichas órdenes entren en conflicto con la 1ª Ley.
- ❖ **3ª Ley:** un robot debe proteger su propia existencia siempre que dicha protección no entre en conflicto con la 1ª o la 2ª Ley.

**Figura 1.2** Portada de la obra *Yo Robot* y las tres leyes de la robótica de Isaac Asimov.

Las novelas de autores como Phillip K. Dick y Arthur C. Clarke; y la producción de películas taquilleras como *Star Wars*, *Terminator* y *Yo Robot* han contribuido a la popularidad generalizada de la robótica en la cultura popular. De hecho, *Metropolis* de Fritz Lang fue la primera película en presentar un robot humanoide (1927) [1].



**Figura 1.3** Robots famosos de la historia del cine: **a)** Robot de Metrópolis (1927), **b)** C3PO y R2D2 de Star Wars (1977), **c)** T-800 de Terminator (1984), **d)** Johnny 5 de Cortocircuito (1986) [1].

A continuación, se presentarán algunas definiciones que ayudarán al lector a comprender y diferenciar entre los diversos robots (especialmente los robots móviles) que han ido apareciendo como resultado del avance tecnológico y que se abordarán en otras secciones de este capítulo.

### 1.2.1 Definición de Robot

El constante surgimiento de nuevos prototipos robóticos (antes no imaginados) y los avances en otras disciplinas afines al área de la robótica, ocasionan que el concepto de robot deba ser revisado y actualizado con frecuencia. Los primeros textos literarios de ciencia ficción en donde se hace referencia a la robótica (como los mencionados anteriormente), exhiben viviendas robotizadas, vehículos robóticos o robots que presentan una alta capacidad de interacción con los humanos. Todos ellos han dejado de ser hoy en día simples fantasías de la ciencia-ficción y se han convertido en realidades tecnológicas que forman parte de la disciplina de la robótica [2]. Debido a ello, es complicado formular un concepto específico para la palabra robot y, por tanto, se dificulta definir este término con la suficiente generalidad como para cubrir el amplio campo de dispositivos que en la actualidad son considerados robots. En base a lo mencionado, puede resultar válido el examinar varios enunciados técnicos realizados por diferentes organizaciones inmersas en este campo, antes de dar una definición generalizada y comprensible del término robot.

La primera definición formal de robot se da a conocer en el año 1972 por parte de la asociación mundial de robótica JIRA<sup>1</sup> según la cual:

**Robot (JIRA):** *es un dispositivo capaz de moverse de modo flexible, análogo al que poseen los organismos vivos, con o sin funciones intelectuales, permitiendo operaciones en respuesta a las órdenes humanas [2].*

Para el año 1979 también se crea en Estados Unidos la asociación de robótica RIA<sup>2</sup>, la cual promueve la siguiente definición:

**Robot (RIA):** *es un manipulador multifuncional y reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos variables programados para el desarrollo de una diversidad de tareas [3].*

Estas primeras definiciones a pesar de ser muy cerradas y específicas se consideraron apropiadas en su momento y fueron tomadas como punto de partida para las sucesivas definiciones que se han ido asignando al término robot.

Actualmente la definición más aceptada es la formulada por la Federación Internacional de Robótica IFR<sup>3</sup>, la cual según su norma ISO 8373:2012 define al robot como:

**Robot (IFR):** *es un mecanismo actuado programable en dos o más ejes con un grado de autonomía, que se mueve en su entorno para realizar tareas previstas. La autonomía es la capacidad para realizar tareas previstas con base en el estado actual y sentido, sin intervención humana. Un robot incluye el sistema de control y la interface con el sistema de control [3].*

Como se puede corroborar, estas dos últimas definiciones concuerdan en cuanto que el robot debe ser reprogramable y multifuncional, pero mientras que en la definición formulada por la RIA se establece que cualquier tipo de robot es un manipulador, sin dar cabida a la existencia de robots que no lo sean, el enunciado expuesto por la IFR generaliza la definición de robot resaltando que puede realizar tareas previstas, enfatizando así que considera la existencia de diferentes tipos de robots, que no están diseñados para la manipulación de objetos o inclusive que no cuentan con esta capacidad.

---

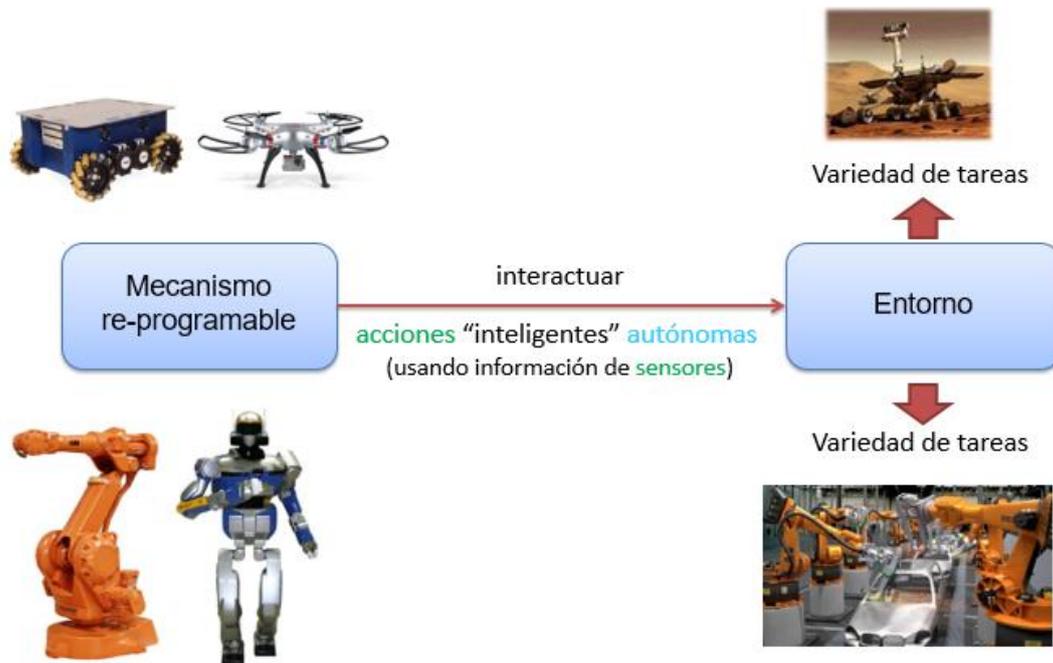
<sup>1</sup> Japanese Industrial Robot Association, actualmente Japan Robot Association – JARA

<sup>2</sup> Robotic Institute of America, actualmente Robotic Industries Association

<sup>3</sup> International Federation of Robotics

En base al análisis e interpretación de estos tres enunciados podemos generar nuestra propia definición de robot atendiendo a la generalidad de los diferentes tipos de robots, que actualmente se usan en la sociedad y la cual es resumida de forma gráfica en la Figura 1.4:

**Robot (autores):** es un mecanismo actuado y reprogramable que interactúa con su entorno para realizar una variedad de tareas, mediante acciones autónomas (inteligentes) generadas a partir de la información captada por sus sensores.



**Figura 1.4** Interpretación gráfica de la definición de robot.

Una definición de robot muy genérica y simple que nos puede servir para englobar cualquier vertiente de la robótica es la siguiente: “Un robot es una máquina que puede sentir, pensar y actuar para conseguir un objetivo predefinido” [1]. Pero no debemos dejarnos llevar por la fantasía, puesto que *sentir*, *pensar* y *actuar* son acciones mucho más limitadas para un robot que para un ser humano.

Debido al creciente avance tecnológico, el desarrollo de múltiples proyectos de investigación y a la constante aparición de nuevos prototipos robóticos, incluso estas definiciones generalizadas resultan insuficientes para incluir al conjunto de sistemas que son considerados hoy en día como robots. Por dicha razón, en la actualidad es habitual adjuntar un adjetivo al término robot, lo cual permite desde el primer instante darse una idea más específica de sus características o

campo de aplicación. Por ejemplo, se podrían mencionar los robots manipuladores, robots móviles terrestres- aéreos - acuáticos, robots humanoides, robots domésticos, robots educativos, micro robots, robots teleoperados, robots escaladores, robots blandos, robots de exteriores, robots de servicio, robots bioinspirados, robots personales, robots flexibles, robots paralelos, entre otros.

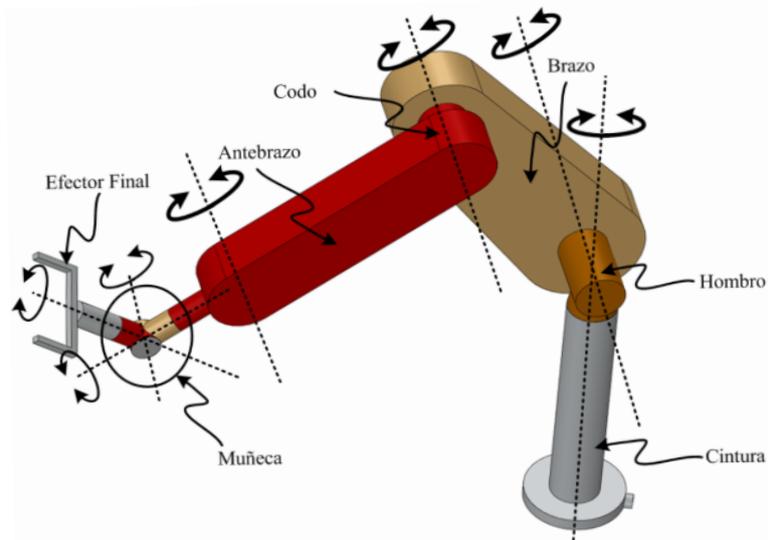
### 1.2.2 Clasificación General de los Robots

En la actualidad existen muchos tipos de robots y multitud de fabricantes dedicados a su comercialización abarcando una amplia gama de aplicaciones. La clasificación de los robots se puede realizar atendiendo a numerosos criterios. En este apartado se propone una clasificación inicial atendido a la movilidad del robot en el entorno, lo cual los distingue en dos grandes categorías:

1. **Robots fijos o estacionarios:** agrupa los robots que permanecen en una ubicación espacial fija en la que realizan sus tareas. Poseen la limitación de desplazamiento impuesta por sus grados de libertad y los rangos de movimiento en cada uno de ellos.
2. **Robots móviles:** formada por los robots que se desplazan en su entorno de trabajo y por tanto cambian la posición y orientación de su chasis (estructura) en el mismo [4].

Dentro de la categoría de robots estacionarios con posibilidad de desplazamiento limitado es meritorio mencionar la subclasificación del *robot industrial manipulador* (Figura 1.5), por su gran empleabilidad en los procesos de manufactura de productos en talleres y líneas de fabricación.

Estos robots, fueron los primeros en ser implementados en los procesos industriales y hoy en día están firmemente posicionados, con una tecnología actualizada y un amplio grupo de fabricantes. Las tareas que este tipo de robot ejecuta son básicamente el de manipular objetos o materiales en un entorno industrial, por ejemplo, la sujeción y posicionamiento de objetos, mecanizado, paletizado, soldadura de puntos y arco continuo, ensamblaje, pintado, corte láser, inspección, etc. Debido a su amplia perduración temporal, se ha podido generar una precisa definición y clasificación según diferentes criterios, los cuales no serán tratados en este capítulo puesto que el libro se centra específicamente en el análisis y definiciones relacionados a la robótica móvil.



**Figura 1.5** Carácter antropomórfico de un robot manipulador.

La fisonomía exterior y capacidad de movimiento del robot industrial manipulador recuerdan los de un brazo humano, por lo que es bastante usual denominarlos *brazos articulados* o *brazos robóticos* (Figura 1.5). El extremo del robot está equipado con un efector final (en ocasiones intercambiables) consistente en una pinza de agarre o bien una herramienta. Otra posible clasificación de los robots es considerando la aplicación para la cual fueron diseñados:

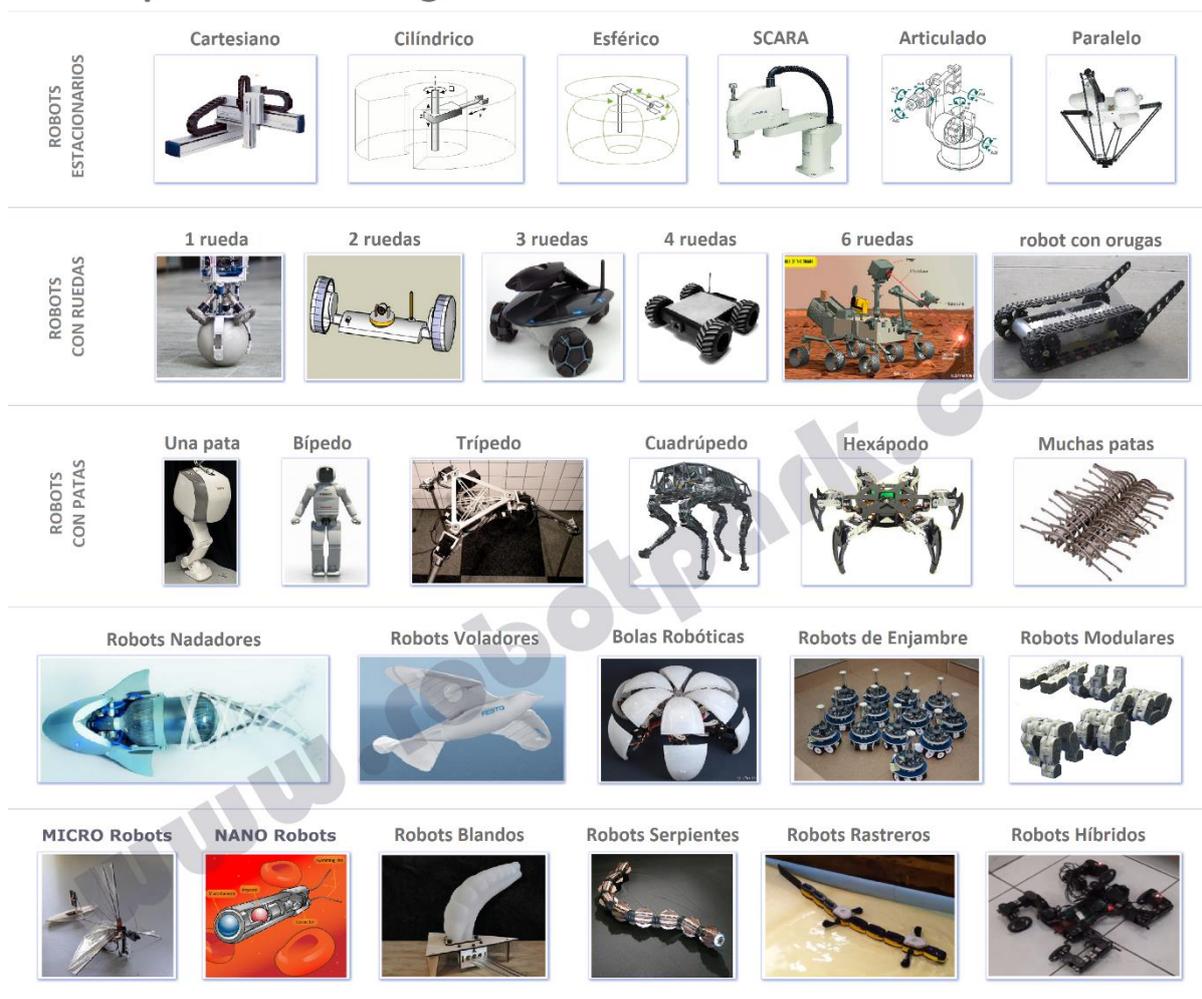
1. **Robots industriales:** utilizados en aplicaciones de automatización industrial (manufactura, inspección, empaquetado, ensamblaje, etc.). Según la norma ISO 8373:2012 de la IFR un robot industrial es un sistema controlado automáticamente, multipropósito y reprogramable, que puede ser estacionario o móvil para su uso en aplicaciones de automatización industrial. El robot industrial incluye el manipulador, los actuadores y el controlador, la consola de programación y cualquier interfaz de comunicación (hardware y software).
2. **Robots de servicio:** operan de manera semi o totalmente autónoma y realizan tareas para humanos o equipamiento, excluyendo las aplicaciones de automatización industrial. Esta definición se complementa con las siguientes aclaraciones: los robots manipuladores industriales, pueden ser incluidos también en esta categoría cuando estén siendo empleados en tareas no relacionadas a la fabricación. Los robots de servicio pueden contar o no con un brazo manipulador y en la mayoría de los casos, su diseño consiste de una plataforma móvil con uno o varios brazos que son controlados del mismo modo que los robots industriales [2].

Todo lo mencionado hasta el momento, pone de manifiesto lo complejo que resulta definir de manera precisa a un robot de servicio. Por dicha razón, en la práctica el experto en robótica procura utilizar su propio discernimiento para determinar si un dispositivo específico es o no un robot y además si es o no de servicio, incluyendo en esta clasificación aquellos empleados en asistencia médica y cuidados de la salud, soporte a clientes, transporte, exploración, educación, tareas domésticas y de oficina, logística y transporte, minería, agricultura, entre otras.

Existen clasificaciones de robots mucho más específicas que pueden ser encontradas dentro de la literatura referente a la robótica, por ejemplo, considerando la aplicabilidad general del robot según una determinada tarea asignada. En nuestro caso particular, el resto del capítulo concentra su atención en los robots móviles indistintamente si se los clasifica como robots industriales o de servicio, sino más bien atendiendo el tipo de locomoción y el medio por el cual se desplazan.

La compañía Robotpark ha propuesto una clasificación más específica atendiendo el tipo de locomoción de las estructuras mecánicas y que según a criterio de los autores de este libro permite encajar a cualquier robot dentro de esta categorización. Esta clasificación se presenta en la Figura 1.6 y aunque no se seguirá de forma estricta será una buena base para realizar la clasificación general de los robots móviles presentados más adelante y la clasificación particular de los robots con ruedas abordada en el Capítulo 2.

## Todo tipo de Robots según la Locomoción



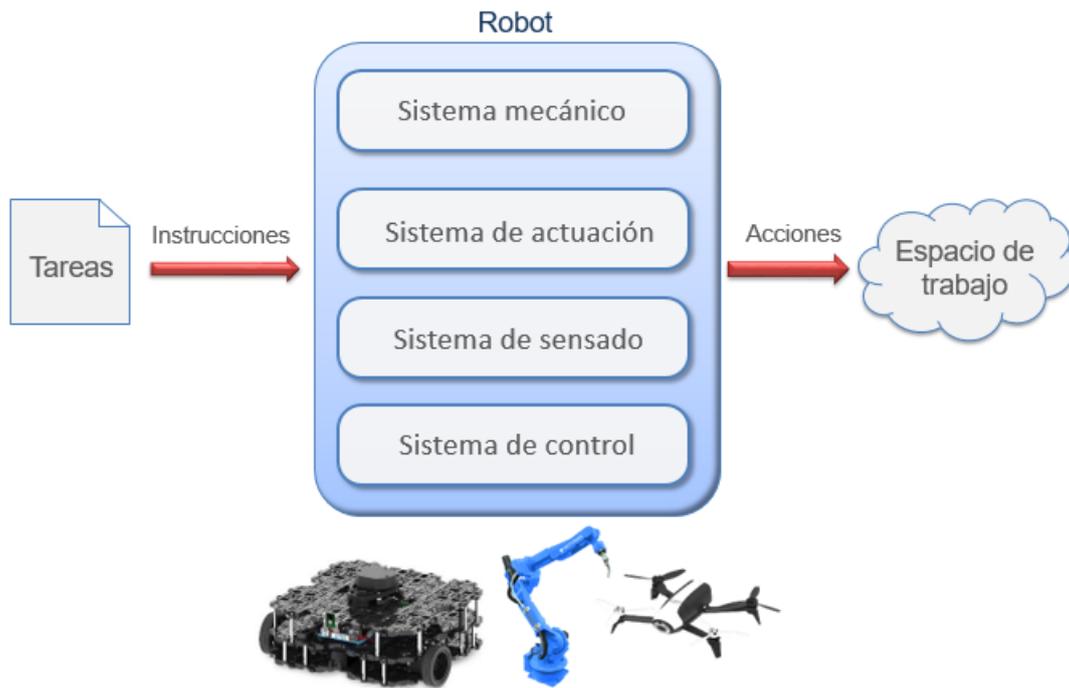
[www.robotpark.com](http://www.robotpark.com)

**Robotpark**

**Figura 1.6** Clasificación de los robots según su tipo de locomoción (propuesta por Robtpark) [23].

### 1.3 Componentes de un Sistema Robótico

Cualquier robot en general está formado por algunos componentes que se pueden agrupar en varios sistemas conocidos como el sistema mecánico, el sistema de actuación o accionamiento, el sistema de sensado o sensorial, el sistema de control y en algunos casos particulares compuestos por elementos terminales (Figura 1.7).



**Figura 1.7** Elementos constitutivos de un robot.

### 1.3.1 Sistema Mecánico

Corresponde a la estructura que aloja los componentes y da soporte mecánico al robot. En el caso de un robot manipulador el sistema mecánico lo constituye una serie de elementos o eslabones unidos mediante articulaciones que permiten la generación de movimiento de toda la estructura. El movimiento de las articulaciones puede ser lineal, de giro, o una mezcla de ambos.

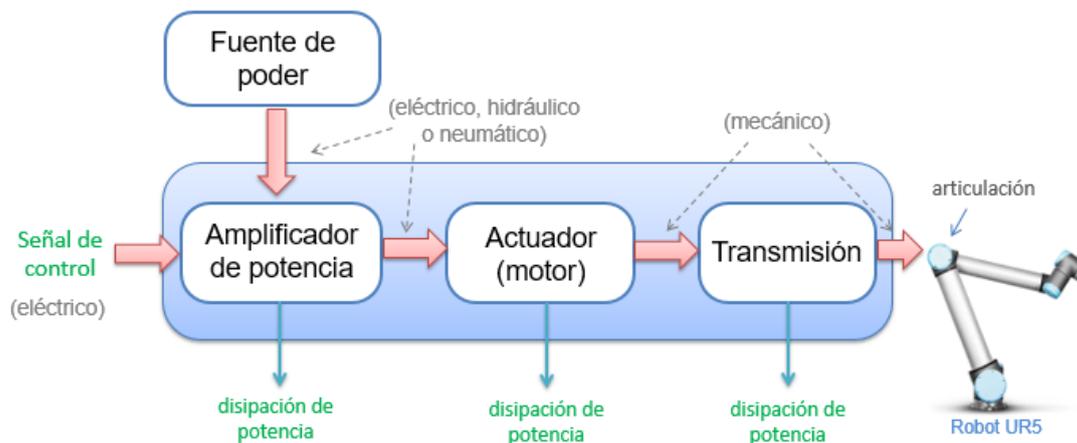
Los elementos terminales o herramientas, también conocidos como efectores finales forman parte del sistema mecánico y permiten al manipulador realizar la tarea deseada una vez que se ha posicionado el brazo y orientado la muñeca. Existe una gran cantidad de elementos terminales diferentes en función del trabajo que se vaya a efectuar. En el caso de los robots móviles a toda la estructura mecánica se la suele denominar chasis. En la Figura 1.8 se muestra un robot móvil manipulador en donde se pueden apreciar todos los elementos que conforman el sistema mecánico en la mayoría de los robots.



**Figura 1.8** Elementos que conforman el sistema mecánico de un robot móvil manipulador (Robot TIAGO - PAL Robotics).

### 1.3.2 Sistema de Actuación

Es el encargado de generar el movimiento de los componentes del robot acorde a los mandos dispuestos por el sistema de control. En la Figura 1.9 se muestra el esquema general y los componentes de este sistema que permiten generar las señales requeridas por los actuadores.



**Figura 1.9** Esquema general del sistema de actuación de un robot.

La fuente de poder abastece de energía al actuador (motor) a través del amplificador de potencia. Para actuadores hidráulicos o neumáticos la fuente de poder corresponde a un compresor hidráulico (brinda aceite) o un compresor neumático (brinda aire), respectivamente, en ambos casos se usan internamente bombas eléctricas para enviar el fluido.

Para el caso de robots manipuladores compuestos por motores eléctricos se utilizan fuentes de alimentación eléctrica AC o DC, donde el suministro de corriente puede venir de la red eléctrica convencional (monofásica o trifásica) o mediante un transformador. Para los robots móviles en cambio se utilizan baterías recargables que generan corriente eléctrica a partir de reacciones electroquímicas de diferentes materiales como NiMH (Níquel-metal hidruro), LiPo (Polímero de iones de litio), NiCD (níquel-cadmio), entre otros [5].

El amplificador de potencia amplifica la señal de control usando también como entrada la fuente de poder y alimenta directamente al actuador modulando la potencia (adapta la potencia) de la fuente de poder empleando para ello la señal de control. Para actuadores hidráulicos o neumáticos el amplificador de potencia varía el caudal del fluido que ingresa al actuador proporcionalmente a la señal de control. Para motores eléctricos el amplificador de potencia varía el voltaje o corriente proporcionalmente a la señal de control, usualmente adapta la tensión de la fuente al voltaje que necesita el motor.

Los actuadores son los componentes que permiten generar de forma directa el movimiento (actuación) de las diferentes partes del robot a través de la transmisión. En los albores de la robótica los robots industriales empleaban actuadores hidráulicos para generar los diferentes movimientos. Por otro parte, las grandes ventajas de la electricidad como fuente de energía han motivado a que en la actualidad la mayoría de los robots existentes empleen motores eléctricos como actuadores. Sin embargo, en determinados entornos y aplicaciones deben ser requeridos otros tipos de actuadores. Como resumen se podría indicar que los actuadores empleados en robótica pueden generar movimiento mediante el uso de energía neumática (aire comprimido), hidráulica (aceite comprimido) o eléctrica (corriente eléctrica) [2].

Las transmisiones (que pueden existir o no en el robot) son los elementos cuya misión es la de transferir el movimiento (potencia) desde los actuadores hasta los ejes de las articulaciones. Junto a las transmisiones también se encuentran los reductores, los cuales permiten adaptar el torque y la velocidad de la salida del actuador a valores apropiados para el movimiento de los componentes del robot. Para el caso de los motores eléctricos el empleo de las transmisiones y los reductores se debe a que estos brindan altas velocidades y bajos torques y muchas de las articulaciones de los robots existentes requieren bajas velocidades y altos torques.

### 1.3.3 Sistema de Sensado

Permite al robot obtener información tanto de su propio estado como del entorno de trabajo a partir de distintas señales útiles dadas por los sensores, con el propósito de que el sistema de control del robot pueda determinar las diferentes acciones a ejecutar sobre los actuadores con la adecuada precisión, velocidad e inteligencia. El sensor es un dispositivo eléctrico, mecánico y/o químico que convierte un atributo del entorno (fenómeno físico) en una medida cuantitativa.

La información relacionada con su estado interno (posición de sus articulaciones, velocidad, aceleración, par, orientación, temperatura, etc.) la adquiere con los llamados *sensores propioceptivos*, mientras aquella información relacionada al estado de su entorno externo (fuerza/torque que se aplica algún objeto, proximidad, imágenes, intensidad de luz, etc.) se obtiene con los *sensores exteroceptivos* [2]. En la Figura 1.10 se muestra un ejemplo de robot móvil manipulador donde se puede apreciar la ubicación de diferentes sensores tantos propioceptivos como exteroceptivos.

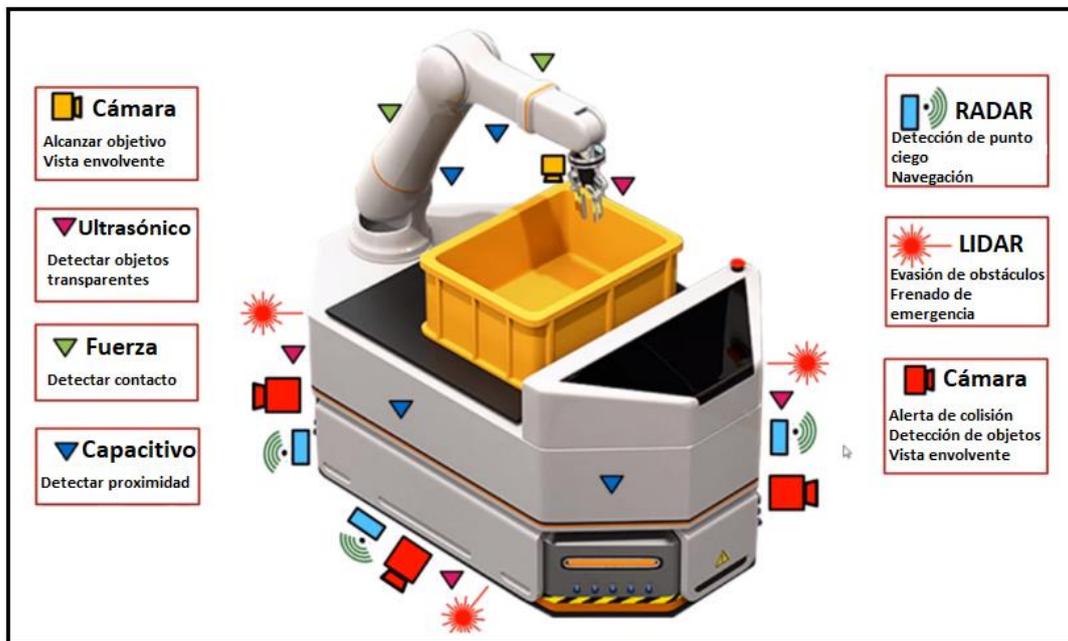
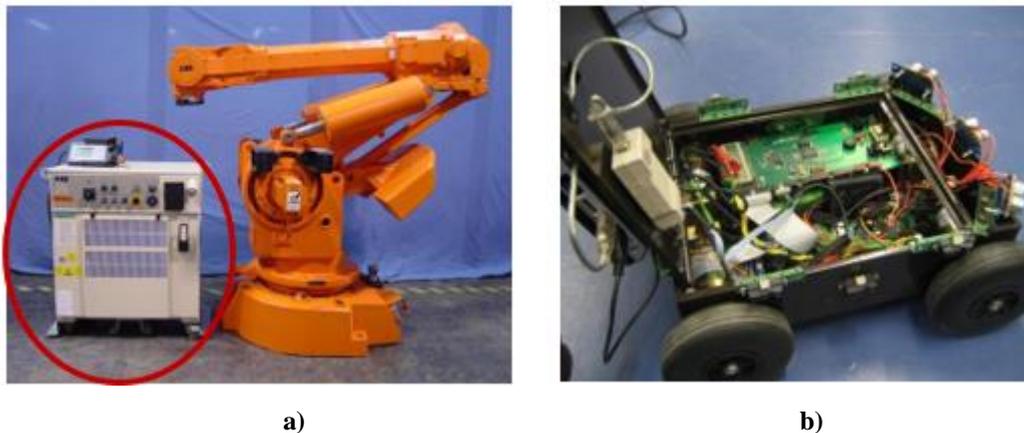


Figura 1.10 Localización de los sensores en un robot móvil manipulador.

### 1.3.4. Sistema de Control

Normalmente se trata de un dispositivo electrónico computacional que realiza los cálculos para que el robot desarrolle las tareas para las que fue diseñado. El controlador normalmente recibe información de los programas base, así como de sistemas de enseñanza, los cuales le permiten mejorar su desempeño. El controlador recibe las señales provenientes del sistema sensorial (sensores), las interpreta y posteriormente decide qué acciones se deben de realizar sobre el sistema de actuación enviando una o varias señales de control.

En la Figura 1.11 se muestran los sistemas de control para un robot industrial manipulador y para un robot móvil con ruedas, en el primero de ellos se observa que el controlador es un módulo externo al sistema mecánico del robot y en el segundo que el controlador corresponde a una tarjeta electrónica localizada en la parte interna del chasis.



**Figura 1.11** Localización del controlador: **a)** Robot industrial manipulador de ABB, **b)** Robot móvil Univ Bonn.

### 1.4. Robots Móviles

En esta categoría se incluyen todos aquellos robots que poseen capacidad de desplazamiento y movilidad en un entorno de dimensiones superiores a las del propio robot, además de que el robot incorpora todos los elementos que le permiten generar movimientos y las tareas encomendadas (potencia, control y sistema de navegación). Generalmente estos robots no permanecen por mucho tiempo en la misma posición, ya que están diseñados para desplazarse en los mismos medios (terrestres, aéreos y acuáticos) que lo hacen los vehículos diseñados por el ser humano.

### 1.4.1 Definiciones de Robots Móviles

Un *robot móvil* se define como un sistema electromecánico con la capacidad de desplazarse de forma autónoma sin estar sometido físicamente a un solo punto. Posee sensores que le permiten monitorear a cada momento su posición relativa respecto a su punto de origen y a su punto de destino [6]. Normalmente su control es en lazo cerrado y puede ser una plataforma móvil con o sin manipulador.

Los robots móviles no son solo una colección de algoritmos para detectar, razonar y moverse por el espacio, sino también son encarnaciones físicas de estos algoritmos e ideas que deben hacer frente a todos los caprichos del mundo real. Como tal, los robots móviles proporcionan una verificación de la realidad de los conceptos mediante la implementación de algoritmos teóricos para la planificación de rutas, la representación del conocimiento, la detección y el razonamiento [8].

Antes de describir los distintos tipos de robots móviles, se debe indicar que, para hablar propiamente de robots, estos deben poseer cierta capacidad de autonomía. Entendiendo por *autonomía* la capacidad que tiene el robot de enfrentarse por sí mismo a situaciones no previstas por el diseñador. En esta definición se excluyen a los vehículos teledirigidos por un operador humano.

Un *robot móvil autónomo* (AMR, *Autonomous Mobile Robot*) está programado para funcionar sin intervención humana y con la ayuda de la inteligencia artificial incorporada (control autónomo), puede actuar y coexistir dentro de su entorno tomando decisiones sobre la marcha durante el curso de una misión. Dichas decisiones se adoptan teniendo en cuenta la información recogida por los sensores propioceptivos y exteroceptivos del sistema que proporcionan respectivamente información del estado interno del robot y de su entorno. Este tipo de robots desarrollan sus misiones en entornos parciales o totalmente desconocidos, pudiendo emplearse, tanto en aplicaciones en el interior de edificios o casas (por ejemplo, robots de servicio), como en exteriores (por ejemplo, robots de exploración o intervención).

En algunas situaciones los robots móviles pueden desarrollar una misión en lugares inaccesibles para el ser humano donde es imposible la operación directa sobre el robot (por ejemplo, exploración planetaria). Esto exige la autonomía completa del robot una vez iniciada la misión.

La autonomía no solo se refiere a la capacidad de operación sin control humano, sino también a la necesidad de que el propio robot disponga de una fuente propia de energía.

A diferencia de los manipuladores industriales, en los que la alimentación del robot se obtiene de la red eléctrica convencional, en los robots móviles la alimentación se consigue mediante baterías eléctricas con un funcionamiento limitado por la capacidad eléctrica de las mismas. Un requisito para asegurar el diseño eficiente de un robot móvil es la elección de baterías adecuadas, cuyo compromiso peso-autonomía sea lo más ventajoso posible [4].

Los robots móviles de hoy en día pueden moverse de forma segura en entornos desordenados, comprender el habla natural, reconocer objetos reales, ubicarse, planificar rutas y en general, pensar por sí mismos. El diseño de *robots móviles inteligentes* emplea las metodologías y técnicas de control inteligente, control cognitivo y el basado en el comportamiento. Los robots móviles deben maximizar la flexibilidad del rendimiento sujetos a un conjunto reducido de entradas y una complejidad computacional mínima [7].

## **1.4.2 Funcionamiento del Robot Móvil**

El funcionamiento general de un robot móvil autónomo puede ser explicado considerando los tres conceptos incluidos en la definición genérica del término robot: sentir, actuar y pensar. Cualquier robot móvil debe estar equipado con todos los elementos necesarios para tener la capacidad de desplazarse (actuar), conocer (sentir) e interactuar-reaccionar (pensar) con el entorno en donde se encuentra realizando algún tipo de trabajo

### **1.4.2.1 Desplazamiento (Actuar)**

Implica desplazarse y/o manejar otros objetos, en donde la propiedad de moverse por un entorno presenta complicaciones considerables. El simple hecho de desplazarse implica el diseño de un sistema de locomoción que admita superar los obstáculos que se presenten en el entorno. Un robot móvil puede moverse eficientemente por un terreno liso empleando ruedas, pero no así por un ambiente pedregoso, como se demandaría para un robot diseñado para labores de rescate en terremotos, en donde por ejemplo el empleo de orugas o patas sería lo más apropiado.

### 1.4.2.2 Conocimiento del Entorno (Sentir)

El siguiente desafío es conocer en todo instante el estado interno del robot y el entorno exterior por el que debe moverse. Este conocimiento puede ser local, si se basa en usar sensores para percibir obstáculos próximos, por ejemplo, muros; o global, cuando tiene grabado un mapa completo del entorno. El conocimiento local, de hecho, puede ser empleado para construir un mapa global, a este procedimiento se le suele denominar *mapeado*.

Indudablemente, si el robot ya posee un mapa, el siguiente paso consiste en conocer su postura dentro del mapa. Este procedimiento se conoce como *localización* y puede efectuarse manualmente mediante el posicionamiento del robot en una postura concreta antes de iniciar el desplazamiento, o bien mediante la detección con balizas, que son puntos con características particulares que pueden ser detectados haciendo uso de algún tipo de sensor y que son utilizados de referencia. Estas balizas pueden ser activas, cuando emiten energía para su detección (como, por ejemplo, un satélite GPS), o pasivas, si no la emiten (como, por ejemplo, una señal de tráfico que nos muestra la vía correcta).

Realmente, las técnicas de mapeado y localización se efectúan en muchas ocasiones de forma conjunta, dando lugar a lo que se denomina SLAM (*simultaneous localization and mapping*, es decir, localización y mapeado simultáneo), que es un proceso mediante el cual el propio robot, al desplazarse por el entorno, va formando un mapa momentáneo que actualiza a medida que obtiene nuevos datos con sus sensores, como se muestra en el ejemplo de la Figura 1.12.



**Figura 1.12** Ejemplo de SLAM empleando un sensor Kinect acoplado a bordo de un robot móvil.

### 1.4.2.3 Interacción y Adaptación con el Entorno (Pensar)

Esta característica significa que los robots móviles deben ser capaces de decidir cómo hay que actuar en base a lo que se ha percibido para conseguir el objetivo deseado. Pero, sin duda, el mayor de los desafíos es desplazarse por lo que se denomina un entorno no estructurado. Los robots industriales fijos ejecutan su trabajo en el mismo sitio y bajo las mismas condiciones desde la instalación hasta que son reemplazados por fallo o desgaste. Asimismo, su labor se simplifica a una serie de movimientos programados previamente y ejecutados en un entorno conocido y controlado en el que se evita colisionar con elementos de dicho ambiente o con otros robots. No obstante, un robot móvil tendrá que moverse por un entorno no acotado en el que se hallará objetos móviles o personas con los que deberá interactuar o efectuar tareas y que usualmente no se comportarán de igual manera. Por lo cual el robot debe estar en la capacidad de reaccionar ante escenarios no planificados anticipadamente y esto se consigue con un buen algoritmo de control. Una gran ventaja de los robots móviles es su versatilidad, que les permite efectuar tareas muy diversas, así se pueden mencionar campos de aplicación tan diferentes entre sí como la limpieza, agricultura, transporte, rescate, vigilancia o incluso exploración espacial.

### 1.4.3 Arquitectura del Robot Móvil

En general, un sistema robótico móvil autónomo del tipo que sea, contiene los bloques mostrados en la Figura 1.13. Estos componentes ya han sido analizados en la sección 1.3, pero se mencionarán características particulares para el caso de los robots móviles.

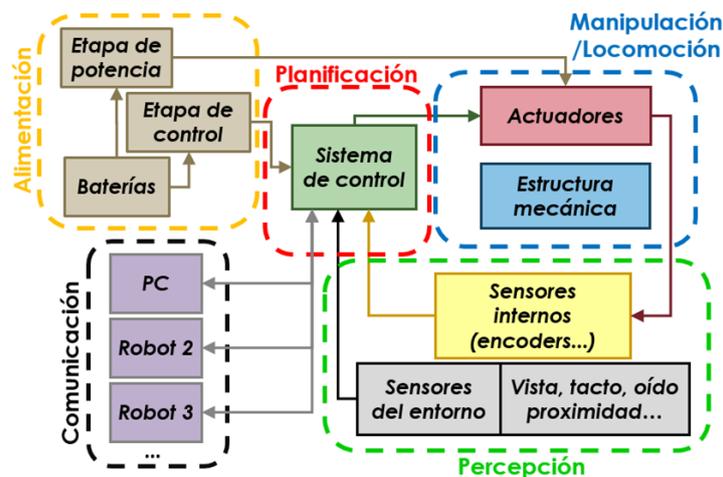


Figura 1.13 Partes integrantes de un sistema robótico móvil [1].

**Alimentación:** consiste en las baterías y circuitos electrónicos que se encargan de suministrar la energía eléctrica necesaria a todos los componentes del sistema para que puedan ejecutar sus tareas. Se acostumbra a dividirla en dos partes:

- **Etapa de potencia:** la conforman dispositivos electrónicos con la capacidad de transferir corrientes considerables permitiendo mover los elementos electromecánicos, que requieren energía para funcionar, como los actuadores del robot que están unidos a los elementos mecánicos que permiten realizar los diferentes movimientos.
- **Etapa de control:** son dispositivos que alimentan los elementos meramente electrónicos y suelen emplear corrientes muy pequeñas en las que es sustancial eliminar, en la medida de lo posible, el ruido eléctrico para que los datos sean transferidos sin errores.

**Percepción (sentir):** son dispositivos (sensores) con la capacidad de medir variables relevantes que dan a conocer el estado interno del robot (como el estado de energía de las baterías), así como conseguir información del entorno que le rodea (como la cantidad de luz). Estos dispositivos se explicarán en detalle en el Capítulo 4.

**Manipulación/Locomoción (actuar):** son los dispositivos encargados de generar movimiento en el robot (motores, servos, entre otros), incluyendo la estructura mecánica que los contiene. Este movimiento puede utilizarse tanto para interactuar con objetos (manipulación) como para movilizarse por el entorno (locomoción). La estructura mecánica y los sistemas de locomoción basados en ruedas se detallarán en el Capítulo 2.

**Comunicaciones:** son los elementos y protocolos que permiten realizar los intercambios de información ya sea de forma cableada (por ejemplo, CAN-BUS, I2C, USB, RS-232) o inalámbrica (por ejemplo, Wifi, Bluetooth, ZigBee) entre:

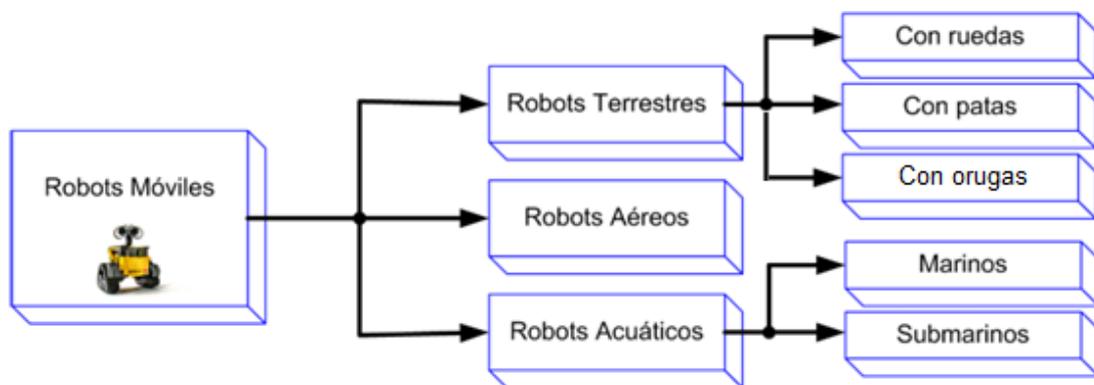
- **Elementos del propio robot:** por ejemplo, las comunicaciones entre los encoders, los motores y la tarjeta controladora de un robot móvil con ruedas para poder recorrer una trayectoria ya establecida.
- **Distintos robots:** para efectuar tareas colaborativas. Un ejemplo muy común es en el campo logístico y de bodega, donde varios robots se comunican entre sí para conocer la posición del otro y determinar cuál debe ser seleccionado para realizar la tarea asignada.
- **El robot y un sistema informático:** por ejemplo, en un robot de vigilancia, de modo que pueda proveer la señal de alarma.

**Planificación (pensar):** lo conforman los dispositivos controladores y los algoritmos de programación almacenados en sus memorias. Es el cerebro del sistema robótico y emplea la información captada a través de los sensores y de las comunicaciones para determinar cuál será la siguiente acción que se debe efectuar y transferir las órdenes apropiadas a los actuadores.

Los microcontroladores, dispositivos lógicos programables o microprocesadores en sistemas más avanzados incorporados en las tarjetas electrónicas (sistemas embebidos) son los encargados de ejecutar esta planificación en función de los requerimientos deseados y diseñados por el programador.

#### 1.4.4 Clasificación General de los Robots Móviles

El interés especial que se ha tenido hacia los robots móviles ha generado una diversidad de estructuras en el desarrollo de estos, distinguiéndose y clasificándolos de forma general de acuerdo al medio por el cual se desplazan como: terrestres, aéreos y acuáticos (Figura 1.14). No obstante, se puede hacer una distinción más profunda, por ejemplo, en el caso de los robots terrestres según el medio de locomoción usado: locomoción con ruedas, locomoción con patas, locomoción con orugas y locomoción híbrida.



**Figura 1.14** Clasificación de los robots móviles acorde al medio por el cual se desplazan.

Los robots móviles terrestres son conocidos también como vehículos terrestres no tripulados (*UGV, Unmanned Ground Vehicles*) e incluyen generalmente los siguientes componentes: plataforma, sensores, sistemas de control, interfaz de guiado, enlaces de comunicación y funcionalidades de integración de sistemas. La plataforma puede basarse en un diseño de

vehículo todoterreno e incluye el sistema de locomoción, los sensores y la fuente de energía. Las orugas, las ruedas y las patas son formas comunes de locomoción y debido a estos mecanismos de desplazamiento se los suele clasificar en robots móviles con ruedas (*WMR*, *Wheeled Mobile Robots*), robots móviles con patas (*LMR*, *Legged Mobile Robots*), robots móviles con orugas (*TMR*, *Tracked Mobile Robots*) y robots móviles híbridos.

Los robots móviles también pueden incluir brazos robóticos, por ejemplo, plataformas con ruedas, patas u orugas equipados con uno o más manipuladores para realizar diversas tareas. A continuación, se especifican los principios de funcionamiento y características generales de cada uno de estos tipos de robots móviles [3-4, 6-12].

#### **1.4.4.1 Robots Móviles con Patas**

El movimiento de los robots móviles con patas (*LMR*, *Legged Mobile Robots*) está inspirado en sistemas biológicos de la naturaleza, incluidos los humanos. Entre las ventajas que ofrecen estos sistemas robóticos están la de obtener un movimiento flexible en terreno no preparado, menor deformación, más manejabilidad al tener radios de movimiento más pequeños y poder presentar diferentes velocidades. Las patas proporcionan gran maniobrabilidad, capacidad de alcanzar grandes velocidades y posibilidad de desplazamiento en terrenos irregulares permitiendo sortear grandes obstáculos.

Entre los desafíos de diseño que se presentan para este tipo de estructuras están: el diseño y el número patas, así como la coordinación de patas múltiples. La elección de un determinado tipo y número de patas debe de estar condicionado a mantener estabilidad y maximizar el margen de estabilidad y velocidad. El diseño del control para este tipo de sistemas es complejo tanto si se tiene un número menor de patas (donde un factor clave sería la de estabilidad) o si se aumenta el número de patas (donde el factor clave se concentra en la sincronización del movimiento). En la Figura 1.15 se presentan algunos ejemplos de robots móviles con patas (y piernas) diseñados y fabricados por la compañía Boston Dynamics, unas de las empresas pioneras a nivel mundial en este campo.



**Figura 1.15** Algunos robots móviles con patas fabricados por la compañía Boston Dynamics.

#### **1.4.4.2 Robots Móviles con Ruedas**

Las ruedas son los elementos que proporcionan la capacidad de movilidad a estos robots y son el medio más utilizado para el desplazamiento. A pesar de que las ruedas en realidad no existen como medio de transporte en la naturaleza, gracias a ellas el ser humano ha conseguido movilizarse largas distancias y mecanizar tareas que antes no le era posible. El tipo y el número de ruedas del robot se elige en función de la aplicación, mientras que su tamaño se elige en función de las dimensiones del robot.

La ventaja principal de los sistemas de locomoción basados en ruedas es su simplicidad, tanto mecánica como de control. El principal inconveniente es su moderada eficiencia energética a causa de las pérdidas por rozamiento. Además, se debe tener en cuenta que las ruedas no pueden superar obstáculos cuyas dimensiones son similares a su radio.

Los sistemas de locomoción basados en ruedas se controlan fácilmente, por ello, son el sistema de locomoción predilecto en las aplicaciones de Robótica. Existen diferentes configuraciones cinemáticas (Figuras 1.16) para los robots móviles con ruedas (*WMR*, *Wheeled Mobile Robots*) y éstas dependen principalmente de la aplicación hacia dónde va enfocado el robot.

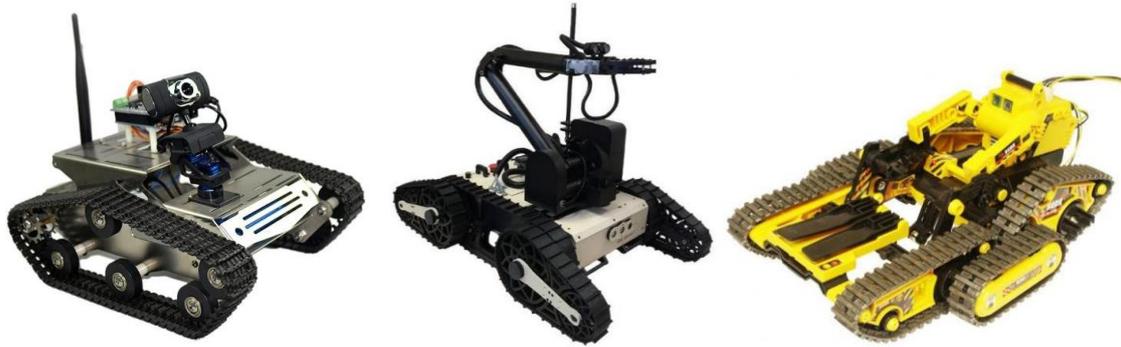


**Figura 1.16** Algunos ejemplos de configuraciones de robots móviles con ruedas con y sin manipulador.

### 1.4.4.3 Robots Móviles con Orugas

En terrenos irregulares, muy deslizantes o con grandes obstáculos, los robots basados en orugas son más convenientes que los basados en ruedas. Con las orugas se consigue una mayor fuerza de tracción en el terreno y se reduce el deslizamiento, manteniendo la misma sencillez mecánica y de control que en los sistemas basados en ruedas.

Los sistemas de locomoción basados en orugas utilizan cadenas de tracción que pueden girar de forma independiente, de modo que cualquier cambio de dirección se consigue mediante la variación de las velocidades relativas de las cadenas. La principal desventaja de este sistema de locomoción es su reducida eficiencia energética ya que se desperdicia mucha energía por rozamiento [4]. En la Figura 1.17 se muestran algunas configuraciones utilizadas en el diseño de robots móviles con orugas (*TMR, Tracked Mobile Robots*).



**Figura 1.17** Algunos ejemplos de configuraciones de robots móviles con orugas.

#### 1.4.4.4 Robots Terrestres Híbridos

Los sistemas híbridos de locomoción terrestre resumen las ventajas de las patas, ruedas y orugas. Se trata de sistemas que intentan resolver situaciones especiales en las que se precisa flexibilidad de locomoción. En la Figura 1.18 se muestran algunas configuraciones utilizadas en el diseño de robots móviles terrestres híbridos.



**Figura 1.18** Algunos ejemplos de configuraciones de robots móviles terrestres híbridos: **a)** patas con ruedas, **b)** patas con orugas, **c)** ruedas con orugas, **d)** patas con ruedas y orugas [10].

#### 1.4.4.5 Robots Móviles Aéreos

Los robots móviles aéreos son llamados también vehículos aéreos no tripulados (*UAV*, *Unmanned Aerial Vehicles*) y están conformados por sistemas móviles que vuelan en un determinado espacio aéreo (drones, cohetes, aviones, helicópteros, sistemas de vuelo que imitan a animales) u orbitan la Tierra o algún otro cuerpo celeste (satélites).

Los robots aéreos están teniendo gran desarrollo debido a las ventajas que presentan sobre los otros tipos de robots móviles, como por ejemplo no sufren de estancamiento por anomalías presentes en el terreno, permiten abarcar un área mayor de desplazamiento obteniendo mayor información sobre el área de interés, entre otros. En la Figura 1.19 se muestran algunas configuraciones utilizadas en el diseño de robots móviles aéreos.



**Figura 1.19** Algunos ejemplos de configuraciones de robots móviles aéreos.

#### **1.4.4.6 Robots Móviles Acuáticos**

Los robots móviles acuáticos son conocidos también como vehículos acuáticos no tripulados (*UWV, Unmanned Water Vehicles*) y aunque existe una creciente en el estudio de los robots acuáticos, solo hay unos pocos robots acuáticos construidos con éxito. Esto se debe al entorno desafiante en el que trabajan y también a que a la electricidad y la electrónica esencialmente no les gusta el agua.

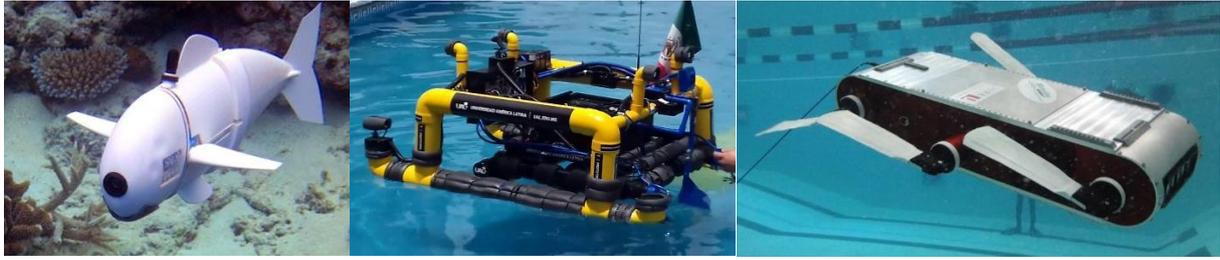
Hacer que un robot funcione en el agua generalmente termina en fallas indeseables, por lo que existen algunos desafíos que se deben superar antes de diseñar un robot acuático. Uno de los principales desafíos al diseñar y crear un robot acuático es hacer que todos los componentes electrónicos sean impermeables para evitar los cortocircuitos. La técnica de transmisión diferencial funciona mejor en estos robots acuáticos y la fuerza impulsora puede ser colas, aletas, propulsores, alas, paletas, ruedas de paletas, bombas de aire, etc., según el diseño del robot. Los robots móviles acuáticos incluyen a estructuras que navegan sobre la superficie del agua (robots acuáticos marinos) y aquellos que se sumergen o se arrastran bajo el agua (robots acuáticos submarinos) [15].

Los robots acuáticos marinos o también conocidos como vehículos de superficie no tripulados (*USV, Unmanned Surface Vehicles*), son embarcaciones que operan en la superficie del agua sin llevar tripulación a bordo. Estos robots marinos pueden ser operados de forma remota (por un operador humano en tierra o en una embarcación próxima), con control parcialmente autónomo o de forma totalmente autónoma (comúnmente conocidos como *ASV* por sus siglas en inglés “*Autonomous Surface Vehicle*”). Algunas aplicaciones modernas y áreas de investigación en las cuales se utilizan *USV* o *ASV* son, entre otras: entregas comerciales, monitorización ambiental y climática, mapeo del fondo marino, transbordo de pasajeros, investigación robótica, vigilancia, inspección de puentes y otras infraestructuras, operaciones militares y navales. En la Figura 1.20 se muestran algunas configuraciones utilizadas en el diseño de robots acuáticos marinos.



**Figura 1.20** Algunos ejemplos de configuraciones de robots acuáticos marinos.

Los robots acuáticos submarinos conocidos como vehículos submarinos no tripulados (*UUV, Unmanned underwater vehicles*) y a veces llamados drones submarinos, son vehículos sumergibles que pueden operar bajo el agua sin un ocupante humano. Estos robots suelen dividirse en dos categorías: vehículos submarinos operados a distancia (*ROUV, Remotely Operated Underwater Vehicles*), que son controlados remotamente por un operador humano; y vehículos submarinos autónomos (*AUV, Autonomous Underwater Vehicles*), que están altamente automatizados y operan independientemente de la intervención humana directa. En ocasiones, solo las plataformas de la segunda categoría se consideran una especie de robot autónomo, pero los de la primera categoría también son robots, sin embargo, necesitan de un operador remoto, similar a los robots quirúrgicos. En la Figura 1.21 se muestran algunos ejemplos de robots móviles acuáticos.



**Figura 1.21** Algunos ejemplos de configuraciones de robots móviles acuáticos.

### 1.4.4.7 Robots Móviles Híbridos

Son aquellos que se diseñan combinando las cualidades de dos o más tipos de locomoción. Por ejemplo, un robot aerodeslizador puede diseñarse para atravesar tierra o agua, otro robot podría caminar bajo el agua y también nadar y un tercero podría volar y gatear. Las combinaciones son enormes y depende del ingenio del diseñador realizar una propuesta innovadora y posible de construir. Entre los robots que implementan un sistema de locomoción capaz de operar tanto en tierra como en el aire, principalmente se han desarrollado bajo el enfoque aditivo y semi-aditivo [10], algunos de estos robots se muestran en las Figuras 1.22.



**Figura 1.22** Ejemplos de robots móviles híbridos: **a)** Orugas y hélices (aditivo), **b)** Ruedas y hélices (aditivo), **c)** Rodillo y hélices (semi-aditivo).

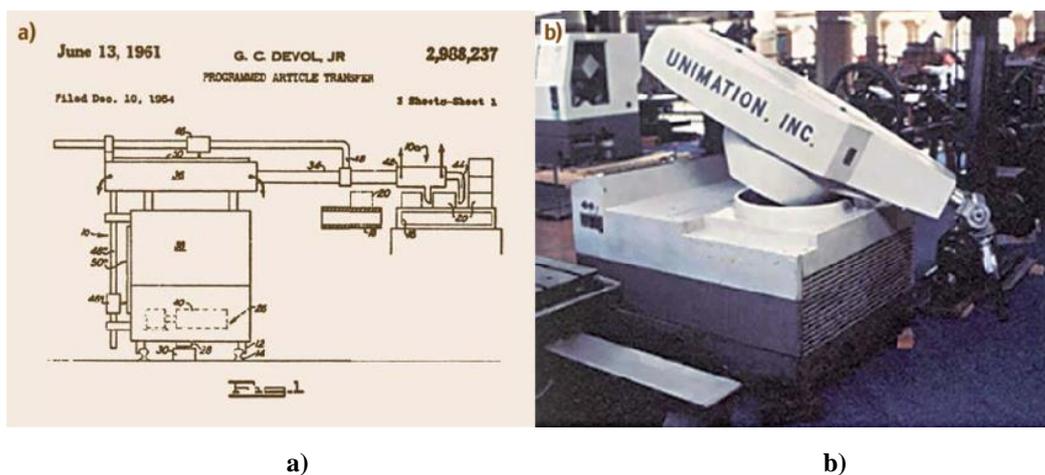
## 1.5 Evolución y Antecedentes Históricos

En esta sección se enumerarán los hitos fundamentales en la historia de la robótica móvil tomando como punto de partida la creación del primer robot industrial, tal y como se entienden dichos robots en la actualidad.

## Unimate: el primer robot industrial (1954)

La primera patente de un robot industrial como los actuales fue presentada en 1954 por George C. Devol, posteriormente registrada y recibida en 1961. Consistía en un brazo mecánico hidráulico terminado en una pinza que estaba ensamblado sobre unas guías y cuya secuencia de movimientos estaba codificada en un tambor magnético. Este brazo robótico se denominó UNIMATE y su diseño se observa en la Figura 1.23.

Este mecanismo electromecánico se ajusta a la definición de *robot industrial manipulador* del principio del capítulo, puesto que podía *sentir* la pieza que estaba manipulando, *actuar* sobre ella para colocarla en un lugar y, aunque no conseguía *pensar* por sí mismo, podía ser acondicionado para ejecutar distintas labores mediante un cambio en la programación incluida en el tambor magnético.



**Figura 1.23** Primer robot industrial de la historia UNIMATE: a) Planos de diseño, b) Robot en operación.

En 1956, George Devol y Joseph Engelberger fundaron la primera compañía de robótica del mundo “*Consolidated Controls Corporation*” que años después cambió su nombre a “*Unimation*”; y finalmente, tras ser expedida la patente en 1961, se instaló el primer robot industrial en la compañía de General Motors de Trenton (New Jersey, Estados Unidos). Su trabajo consistía en manipular piezas de metal muy caliente derivadas de un proceso de moldeo por fundición.

A partir de ese momento, el perfeccionamiento de los robots industriales fue constante, y su instalación en fábricas y cadenas de producción ha aumentado exponencialmente hasta la actualidad.

### **Stanford Cart (1960)**

Fue desarrollado en el Laboratorio de IA de la Universidad de Stanford y fue construido originalmente para simular un vehículo lunar controlado a distancia (teleoperación). Fue rediseñado entre 1967 y 1970 para seguir automáticamente una línea blanca en una carretera. Una cámara de televisión a bordo transmitía información a una computadora remota que controlaba los movimientos del carro.

### **Stanford Arm (1969)**

Primer brazo robótico controlado mediante un computador electrónico y con accionamiento eléctrico, ya que el UNIMATE tan solo tenía una memoria magnética en la que almacenaba las instrucciones, pero no un computador completo. Este brazo pronto se convirtió en un estándar y todavía sigue influyendo en el diseño de los manipuladores robóticos actuales.



a)

b)

**Figura 1.24** a) Stanford Cart, b) Stanford Arm.

### **Shakey (1970)**

Primer robot móvil con ruedas con la capacidad de razonar autónomamente sobre su entorno y de tomar decisiones; fue, por tanto, considerado como el primer robot que ostentaba cierta inteligencia artificial (Figura 1.25). El robot Shakey fue implementado en el Centro de Inteligencia Artificial del Instituto de Investigación de Stanford (ahora SRI International).

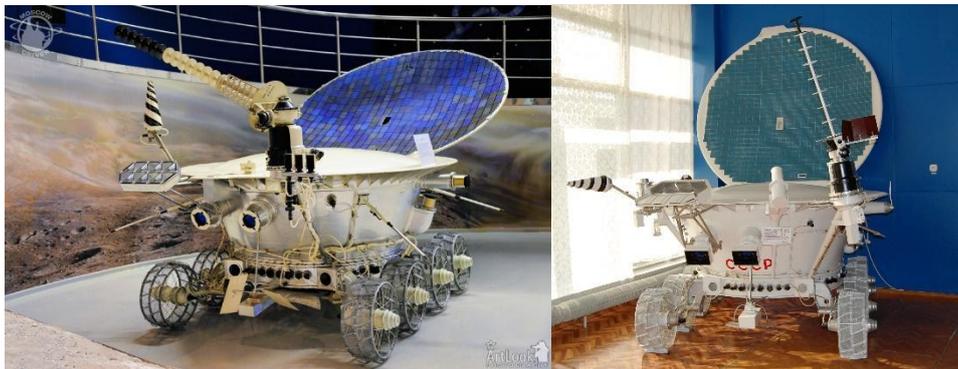


**Figura 1.25** Robot móvil con ruedas Shakey.

Mientras que otros robots tenían que ser programados en cada paso para culminar una tarea, Shakey podía, por sí mismo, analizar la orden y redistribuirlas en partes sencillas. Debido a su naturaleza, el proyecto combinó la investigación en robótica con la visión artificial y el procesamiento del lenguaje. Fue el primer proyecto en el que se implementó el razonamiento lógico y la acción física.

### **Lunojod 1 (1970) y Lunojod 2 (1973)**

Los robots Lunojod 1 y 2 (Figura 1.26) fueron dos astromóviles soviéticos no tripulados controlados a distancia y enviados a la Luna entre los años 1970 y 1973, respectivamente. El objetivo principal de las misiones era explorar la superficie y transmitir imágenes. El Lunojod 1 fue el primer prototipo automático que se operó a distancia fuera de la tierra, hecho que lo convierte en un gran logro histórico.



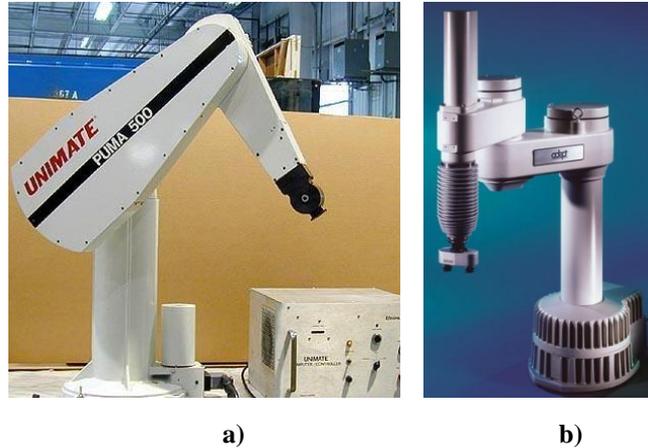
**a)**

**b)**

**Figura 1.26** a) Lunojod 1, b) Lunojod 2.

## **PUMA (1978) y SCARA (1979)**

Unimation desarrolla el robot PUMA (*Programmable Universal Machine for Assembly*), el primer robot programable convirtiéndose en el más famoso y utilizado a nivel industrial y de investigación.

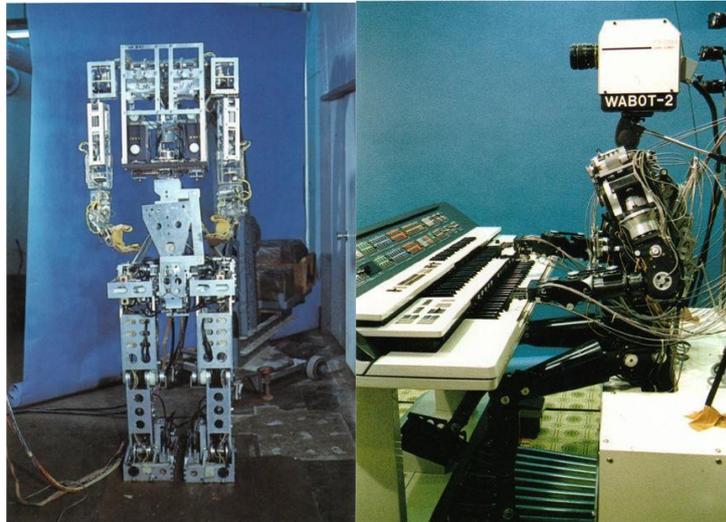


**Figura 1.27 a) Robot PUMA, b) Robot SCARA.**

El SCARA (*Selective Compliant Assembly Robot Arm*) fue desarrollado en Japón y es un robot de cuatro grados de libertad con posicionamiento horizontal, con un coste limitado y una configuración orientada al ensamblaje de piezas. Los robots SCARA son reconocidos por sus rápidos ciclos de trabajo, excelente repetitividad, gran capacidad de carga y su extenso campo de aplicación.

## **WABOT-1 (1973) y WABOT-2 (1984)**

El WABOT-1 fue el primer robot antropomórfico de escala divertida desarrollado en el mundo. Estaba conformado por un sistema de control de extremidades, un sistema de visión y un sistema de conversación. El WABOT-1 pudo comunicarse con una persona en japonés y medir distancias y direcciones a los objetos utilizando receptores externos, oídos, ojos y una boca artificial. El WABOT-1 se desplazaba con sus extremidades inferiores y podía tomar y transportar objetos con manos que utilizaban sensores táctiles. Se estimó que el WABOT-1 tenía la facultad mental de un niño de un año y medio.



a)

b)

**Figura 1.28 a) WABOT-1, b) WABOT-2.**

En 1980 se inició con el proyecto WABOT-2 el cual se configuró para tocar un instrumento de teclado, ya que esta actividad artística requeriría una inteligencia y destreza similares a las humanas. Por lo tanto, el WABOT-2 se definió como un “robot especializado” en lugar de un robot versátil como el WABOT-1. El robot músico WABOT-2 podía conversar con una persona, leer una partitura musical normal con su ojo y tocar melodías de dificultad media en un órgano electrónico. El WABOT-2 también era capaz de acompañar a una persona mientras la escucha cantar. El WABOT-2 fue el primer prototipo en el desarrollo de un “robot personal”.

### **Robots humanoides de Honda (1986)**

La empresa japonesa Honda inició en 1986 el diseño y construcción de una cadena de robots humanoides que desembocaron en el famoso robot ASIMO, exhibido en el año 2000. Entre 1986 y 1993 se produjeron siete modelos de la serie E, que consistía, básicamente, en computadores con dos piernas y la capacidad de caminar. Esta serie fue mejorándose hasta poder sortear obstáculos o incluso trepar escaleras. A partir de 1993 se evolucionó hasta la serie P, en la que el robot tenía brazos además de piernas, cuyo balanceo permitía conservar la estabilidad en el proceso de caminar.

Posteriormente, en el año 2000, se promocionó el robot ASIMO, con una apariencia semejante al de un astronauta y unos movimientos mucho más realistas y versátiles. La Figura 1.29 muestra la evolución de la serie hasta llegar al New ASIMO lanzado en el año 2005.



**Figura 1.29** Robots humanoides Honda. De izquierda a derecha: serie E, serie P y ASIMO.

### **Aquarobot y Genghis (1989)**

El Aquarobot es un robot anfibio de seis patas que utiliza aletas para moverse bajo el agua. El robot se puede operar en modo cableado o sin ataduras (mostrado en la Figura 1.30). Cuando está atado, el operador puede estar situado sobre la superficie o puede operar muy cerca del robot. Está diseñado para aplicaciones que involucran asistencia de buceo, monitoreo ambiental e investigación de locomoción.



a)

b)

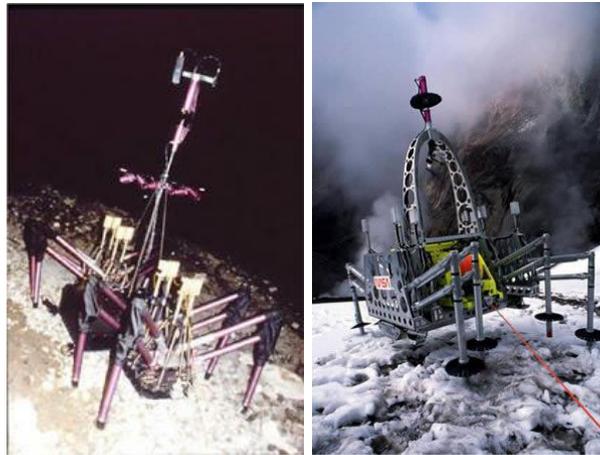
**Figura 1.30** a) Aquarobot, b) Genghis.

Genghis fue un microrrobot hexápodo desarrollado en el MIT (Massachusetts Institute of Technology), famoso por ser económico y sencillo de construir. Contenía 22 sensores (incluyendo ultrasónicos para detectar objetos), cuatro microprocesadores y doce servomotores. Fue pionero en el uso de inteligencia artificial para establecer colonias de robots, hoy conocidas como swarms.

### **Dante I (1993) y Dante II (1994)**

Dante I fue un robot diseñado por la NASA y la universidad estadounidense de Carnegie Mellon el cual fue colocado en el interior del cráter del volcán activo del monte Erebus en la Antártida.

El objetivo de la expedición era estudiar los muros del cráter y el lago interior de lava sin que investigadores humanos corrieran riesgos en las difíciles condiciones del cráter y posteriormente destinado a servir de modelo para la exploración futura del planeta Marte.



a) Robot Dante I, b) Robot Dante II.  
**Figura 1.31**

En Julio de 1994 se desarrolló el robot Dante II que fue empleado para la exploración del volcán del Monte Spurr en Alaska. Estaba formado por ocho patas, con un sistema de locomoción conocido como *framewalker*, representado por el desplazamiento de dos planos paralelos a la superficie, cada uno provisto de cuatro patas que pueden subir y bajar. El movimiento del robot era estáticamente estable pero no totalmente autónomo, estaba telecontrolado, aunque era capaz de realizar algunas acciones por su cuenta.

### **Robotuna (1996) y Rover Sojourner (1997)**

En 1996, el MIT desarrolló el primer robot diseñado con la destreza de nadar y reproducir el movimiento de los peces “Robotuna” (específicamente de los atunes). Este prototipo de robótica, basado en imitar las conductas de los animales, se conoce hoy como bioinspirada y ha dado lugar a robots lagarto y serpiente, entre otros.

En 1997 aterrizó en la superficie de Marte el rover un pequeño vehículo todo terreno de unos 10.6 kg conocido como Sojourner (que significa “viajero”) y construido por la NASA. Contenía cámaras delanteras y traseras y un espectrómetro que permitió determinar la composición de la superficie y la atmósfera marciana, así como desarrollar otros importantes experimentos. Desde la Tierra recibía órdenes que efectuaba de modo autónomo (la teleoperación manual estaba

descartada debido al retraso en las comunicaciones). Estaba previsto que estuviese operativo durante siete días, pero estuvo transmitiendo información durante más de 80 días.



**Figura 1.32** a) Robotuna, b) Rover Sojourner.

### **AIBO (1999)**

AIBO fue una mascota robótica desarrollada por Sony que estuvo a la venta hasta el 2005, con nuevas versiones cada año, aunque todas tenían forma de perro. Fue el primer robot considerado “robot de entretenimiento”, y significó un tremendo avance en lo que hoy en día se conoce como HRI (del inglés *human-robot interaction*, es decir interacción humano-robot). Posteriormente, otros robots, como Pleo, prosiguieron con esta línea de robótica de entretenimiento.



**Figura 1.33** Robots AIBO. Evolución histórica de izquierda a derecha.

En el 2018 Sony nos sorprendió con la última versión de AIBO que cuenta con cámaras y micrófonos y conexión vía internet que permite a su amo interactuar a distancia a través de un smartphone, así como con otros sensores.

## **Robots Actuales (2000 en adelante)**

A partir de la década de 2000 y con los avances de la Electrónica, se han desarrollado numerosos nuevos robots móviles inteligentes capaces de interactuar casi por completo con humanos reconociendo voces, rostros, gestos y capaces de expresar emociones a través del habla, caminar con destreza o realizar tareas domésticas, quehaceres hospitalarios, microcirugías y similares, entre otras actividades. Entre muchos de los ejemplos notables de robots móviles se pueden destacar los siguientes:

- 2000 - Sony presentó Sony Dream Robots (SDR) en Robodex. SDR pudo reconocer 10 rostros diferentes, expresa emociones a través del habla y el lenguaje corporal, y puede caminar sobre superficies planas e irregulares.
- 2000 – Aparece el Sistema Quirúrgico Da Vinci Este desarrollado por la empresa norteamericana Intuitive Surgical y aprobado por la FDA de los Estados Unidos. Este equipo robótico es utilizado para múltiples procedimientos quirúrgicos, principalmente en prostatectomías, además es controlado por un cirujano que maniobra los movimientos de los brazos desde una consola. Se diseñó con el propósito de tener una mayor precisión y confiabilidad en cirugías complejas utilizando un enfoque mínimamente invasivo.
- 2001 - Aparece el sistema robótico Cyberknife de la FDA para el tratamiento de los tumores cancerosos y no cancerosos de cualquier lugar del cuerpo, incluyendo la cabeza, la columna vertebral, el páncreas, la próstata, el pulmón y el hígado. Cuenta con un brazo robótico que emite haces de radiación en variadas direcciones que efectúan una esfera en torno al paciente.
- 2001 - Se desarrolló el robot móvil militar con orugas PackBot utilizado para ayudar a buscar entre los escombros del World Trade Center después del ataque del 11 de septiembre de 2001. Las versiones posteriores de los robots Packbot se emplearon en Afganistán e Irak.
- 2001 - MD Robotics de Canadá construyó el Sistema de Manipulación Remota de la Estación Espacial (SSRMS). Fue lanzado y trabajado con éxito para montar la Estación Espacial Internacional.
- 2002 - La compañía iRobot presentó a Roomba, el primer robot autónomo doméstico para limpiar pisos. Su línea de diseño de robots de limpieza sigue vigente hasta la actualidad.

- 2003 - Axxon Robotics adquiere a Intellibot, compañía que desarrollaba robots comerciales destinados a fregar, aspirar y barrer pisos en hospitales, edificios de oficinas y otras edificaciones comerciales.
- 2003 - Como parte de su misión de explorar Marte, la NASA lanzó dos rovers robóticos en este año llamados Spirit y Sojourner.
- 2004 - Seiko Epson Corporation (“Epson”) anunció que había desarrollado con éxito el micro robot volador más pequeño y ligero del mundo, el uFR-II, que cuenta con control inalámbrico Bluetooth y vuelo independiente, volviendo una vez más a su tecnología micromecatrónica.
- 2005 - Desarrollo de la última versión de robot humanoide ASIMO de Honda.
- 2005 - Boston Dynamics crea el robot cuadrúpedo BIG DOG destinado a transportar cargas pesadas a través de un terreno demasiado accidentado para los vehículos.
- 2006 – Lego desarrolla sistemas electromecánicos para la fácil construcción y programación de diferentes prototipos robóticos aplicados en la Robótica Educativa: Lego Mindstorms NXT (2006), Lego Mindstorms EV3 (2013) y Lego Mindstorms Robot Inventor (2020).
- 2006 - Se introdujo a TALON-Sword, el primer robot disponible comercialmente con un lanzagranadas y otras armas.
- 2007 – Se desarrolla al robot de entretenimiento TOMY i-SOBOT, un robot humanoide capaz de caminar como un humano y realizar acciones de entretenimiento, como patadas y puñetazos.
- 2008 - Shadow Dexterous Hand, es una mano robótica que tiene 24 movimientos y 20 grados de libertad (DOF) para una mayor flexibilidad al agarrar y manipular una variedad de objetos.
- 2008 - Boston Dynamics publicó imágenes de video de una nueva generación de BigDog capaz de caminar sobre terreno helado y recuperar el equilibrio cuando se le pateaba desde un costado.
- 2008 – Desarrollo de Nao un robot humanoide autónomo y programable desarrollado por Aldebaran Robotics. La edición académica de Nao se desarrolló para universidades y laboratorios con fines de investigación y educación. Se promocionó a las instituciones en 2008 y se colocó a disposición del público en 2011.

- 2010 – Desarrollo del robot Rollin Justin de la Agencia Espacial Aérea Alemana, un humanoide con movilidad mediante ruedas que prepara y sirve bebidas.
- 2011 – Apple integra a sus productos a Siri, una inteligencia artificial con funciones de asistente personal a veces con su propia personalidad. Esta aplicación de voz virtual utiliza procesamiento del lenguaje natural para responder preguntas, hacer recomendaciones y realizar acciones mediante la delegación de solicitudes hacia un conjunto de servicios web que ha ido aumentando con el tiempo. Su desarrollo se consideró un aporte significativo para el desarrollo de posteriores robots humanoides.
- 2013 - El youBot de KUKA es un pequeño robot móvil que ha sido diseñado como una plataforma de código abierto para la investigación científica y la formación. El manipulador móvil tiene una base omnidireccional y mecánica robótica con cinco grados de libertad. El robot consta de una plataforma móvil y un brazo robótico.
- 2013 - Priya es un robot móvil Pioneer 3-DX, sus características más visibles son su robusto cuerpo de aluminio rojo y sus dos grandes ruedas de 19 cm. Tiene múltiples aplicaciones y, conectándolo a una computadora portátil y varios otros accesorios, podemos usar Priya para explorar algunos problemas complejos de Robótica Inteligente.

Hasta el año 2022 se han venido desarrollando un sinnúmero de robots móviles tanto en el campo industrial, social e investigativo que resulta imposible tratar de abarcar y explicar los avances desarrollados sobre cada uno de estos robots, por lo que se deja al lector la tarea de buscar dicha información haciendo uso del internet.

En este contexto también es factible mencionar la evolución tecnológica que se ha venido desarrollando sobre los robots móviles manipuladores hasta nuestros días. El concepto de manipulación móvil se remonta a 1984, cuando el MORO (MObiler ROboter) navegaba libremente en un taller entregando y manejando herramientas y piezas de trabajo. Sin embargo, los altos costos del sistema y la falta de potencia de procesamiento impidieron su uso e implementación reales en ese momento. Desde entonces, varias compañías han llevado a cabo muchas investigaciones (Figura 1.34), y todavía hoy existen muchos proyectos de manipulación móvil en curso dentro de diferentes campos de aplicación.

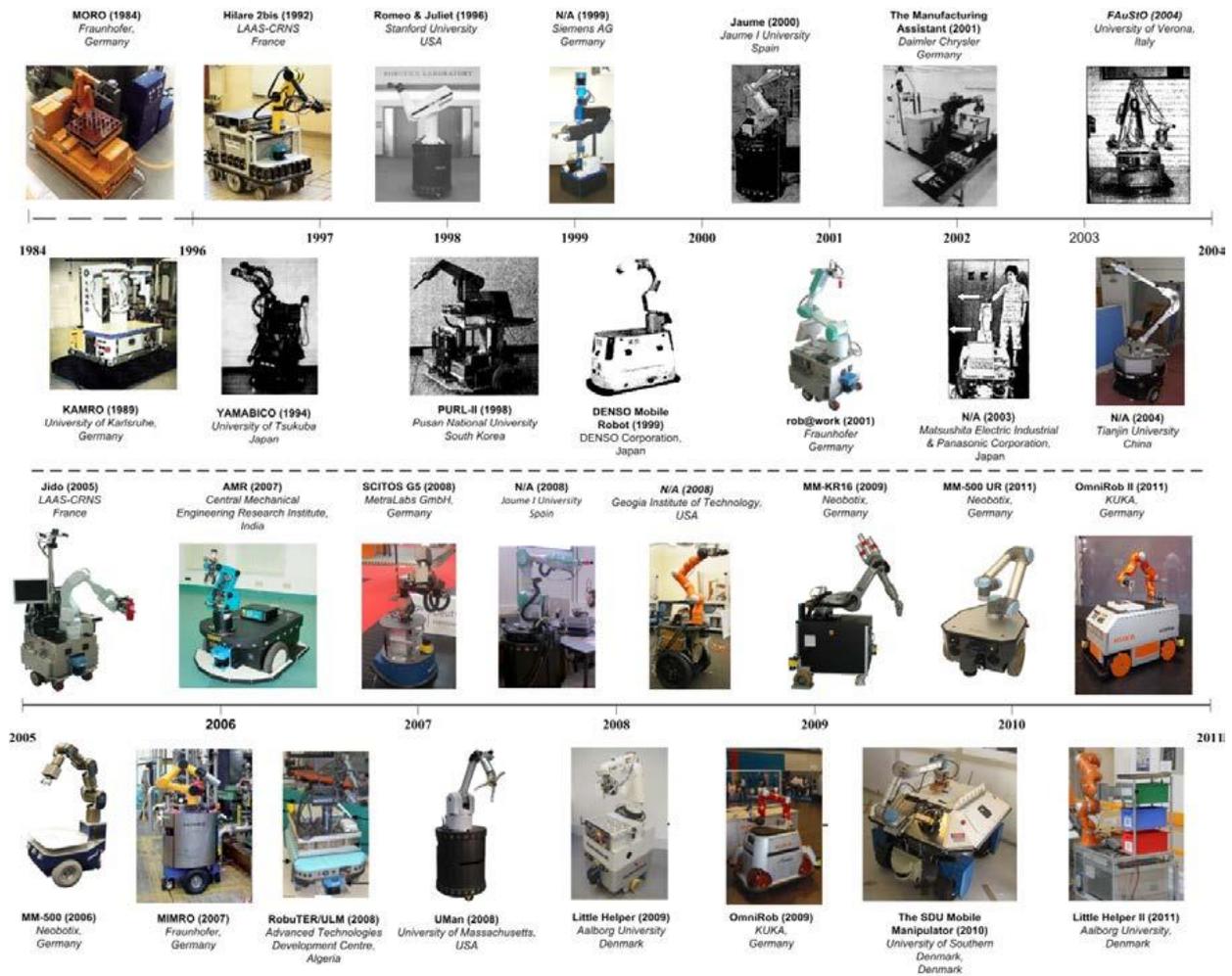


Figura 1.34 Cronología del desarrollo de los robots móviles manipuladores [16].

Una de las empresas pioneras en el diseño y construcción de robots móviles terrestres es Boston Dynamics, la cual es famosa en todo el mundo por sus videos de YouTube que muestran a robots trepando pendientes, tratando de mantener el equilibrio en el hielo, superando obstáculos e incluso ocasionalmente siendo golpeados con palos de hockey por sus desarrolladores. Boston Dynamics ganó reconocimiento fuera de los círculos profesionales después de presentar su robot BigDog de cuatro patas en 2005, que había sido encargado por DARPA.

Casi todos los robots construidos por Boston Dynamics comparten características de movimiento con ciertos animales o humanos. Los desarrolladores se refieren a estas similitudes en el nombre de cada modelo. En la Figura 1.35 se muestran varios de los robots móviles desarrollados por esta compañía según se evolución histórica hasta el año 2018.

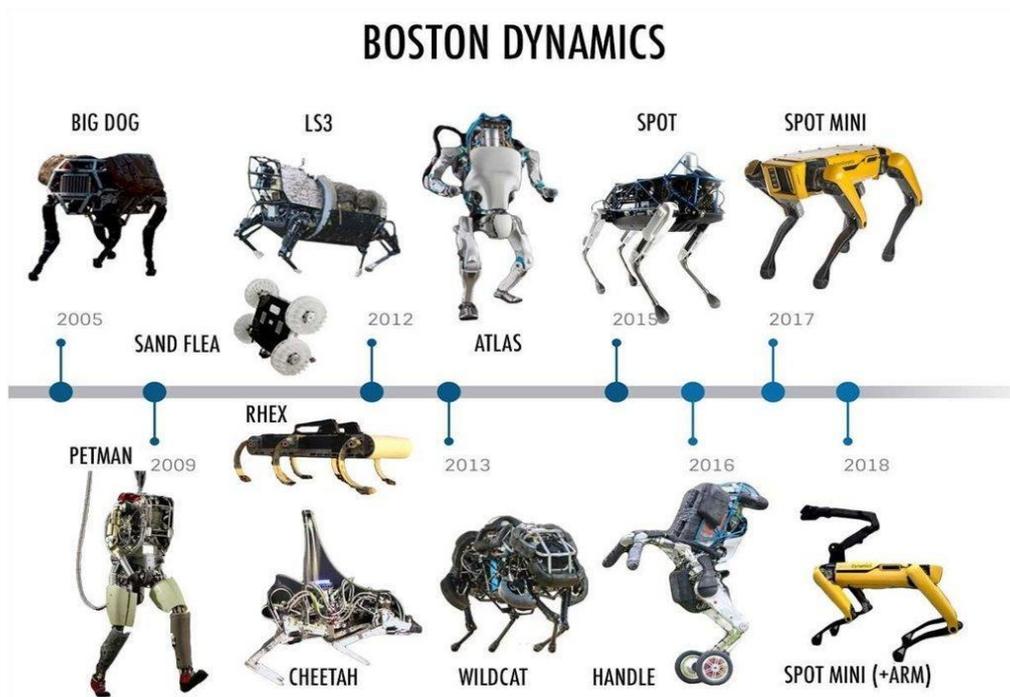


Figura 1.35 Cronología de los robots móviles desarrollados por Boston Dynamics.

## 1.6 Aplicaciones Actuales

Las aplicaciones relacionadas con la robótica móvil son diversas en el mercado, incluidas las variantes aéreas, terrestres y acuáticas. La movilidad promete ser la próxima frontera en robótica flexible. Si bien los robots fijos siempre tendrán un lugar en la fabricación, aumentar los robots tradicionales con robots móviles promete flexibilidad adicional a los usuarios finales en nuevas aplicaciones. Estas aplicaciones incluyen usos médicos y quirúrgicos, asistencia personal, seguridad, aplicaciones de almacenamiento y distribución, así como exploración espacial y oceánica. Vemos un mayor interés en la robótica móvil en todos los ámbitos comerciales debido a la capacidad de un robot móvil para dar servicio a varias ubicaciones y realizar una gama mucho más amplia de tareas lo cual ofrece un gran atractivo para aplicaciones especializadas. Los robots móviles pueden ser empleados por diferentes razones, entre las más relevantes tenemos:

- Tareas peligrosas para humanos
- Tareas repetitivas, aburridas, estresantes o intensivas
- Movimientos con alta precisión

- Tareas desagradables para los humanos
- Entretenimiento para los humanos
- Tareas con recorridos de largas distancias, etc.

En términos generales, los robots móviles autónomos (AMR, *Autonomous Mobile Robots*) pueden realizar una variedad de tareas con un mínimo de participación humana, y muchos están diseñados para operar de manera segura alrededor de personas. Los AMR modernos son capaces de realizar muchas tareas diferentes y ayudar a mantener bajos los costos en numerosos sectores de la economía. Pueden trabajar muchas horas y fines de semana, lo que ayuda a reducir la carga de trabajadores durante el pico de producción sin la necesidad de contratar más trabajadores para fábricas y almacenes.

Las aplicaciones de la robótica móvil en cualquier campo industrial están diseñadas para optimizar cualquier proceso de producción que pueda resultar demasiado peligroso o repetitivo para los trabajadores. Por tanto, los robots industriales móviles están pensados para ser herramientas que aporten soluciones y ofrezcan funcionalidades que simplifiquen los trabajos.

Las aplicaciones de la robótica móvil han permitido a numerosas industrias aprovechar todos los beneficios que la automatización inteligente aporta a cualquier línea de producción y se han constituido en herramientas automatizadas claves para crear espacios industriales más seguros y eficientes y lograr una mayor productividad.

En el espacio industrial, los robots móviles autónomos están redefiniendo el campo de juego para los vehículos guiados autónomos (AGV, *Autonomous Guided Vehicles*) en el sentido de que las plataformas móviles modernas son capaces de operar en áreas sin requerir alteraciones o inversiones en la infraestructura existente. Los robots móviles superan un impedimento histórico de los AGV, como su incapacidad para redirigirse dinámicamente. Los robots móviles están equipados con sistemas avanzados de inteligencia sensorial y mejorada. Los robots estacionarios tradicionales llevan en el sector industrial mucho más tiempo que los robots móviles autónomos, aun así, con los recientes avances tecnológicos en el aprendizaje automático y la inteligencia artificial, los AMR han comenzado a convertirse en una parte fundamental en los diferentes procesos de manufactura y producción industrial.

Hasta el año 2020, las aplicaciones para robots móviles avanzaron en todos los sectores, desde la fabricación y el comercio minorista hasta el servicio al cliente, hemos visto que la robótica colaborativa hacía cosas notables, sin embargo, la tecnología tiene mucho más que ofrecer. El

rango de aplicaciones de la robótica móvil industrial y de servicios (interiores y exteriores) es tremendamente amplio y resultaría demasiado extenso enunciarlos todos con sus ejemplos en este libro, sin embargo, veremos unos cuantos ejemplos motivadores por su utilidad y/o dificultad, mostrando ejemplos reales y actuales de sistemas robóticos móviles, así como algunas líneas de investigación que se están desarrollando hoy en día y en las que se depositan grandes expectativas para el futuro.

### 1.6.1 Logística en Almacenes Automáticos

Desde la fábrica hasta la entrega del producto, se están automatizando muchos eslabones de las cadenas de suministro. Desde carros móviles que acompañan a los recolectores humanos hasta sistemas más autónomos que se mueven por los almacenes por sí mismos, existe una increíble variedad de robots móviles en la cadena de suministro y la logística en la actualidad.

Las actividades de trabajo de transporte de materiales para las líneas de producción y ensamblaje son una labor que necesita mucho tiempo y no añade valor para la mayoría de los fabricantes. Los robots móviles autónomos son una solución simple, eficiente y rentable para automatizar el manejo de materiales y tareas de transporte en casi cualquier situación en la que se han requerido previamente empleados para empujar los carros alrededor de la instalación.

Los subconjuntos, ensamblajes y otros consumibles frecuentemente se transportan manualmente a largas distancias desde el almacén hasta el sector de ensamblaje. Automatizar el transporte de productos representa que los trabajadores pueden estar disponibles en su área de trabajo para cumplir con otras tareas más relevantes mientras se les lleva y se les quita el trabajo con los AMR. A continuación, se muestran cuatro sistemas móviles empleados en la manipulación y transporte de productos dentro un almacén automatizado.

**Robot con estantería estática:** las unidades de estantería se utilizan a menudo para transportar productos semiacabados o terminados entre producciones, entre producción y almacén y/o en la logística del almacén. Los módulos de estantería se utilizan a menudo en instalaciones semiautomatizadas, donde un empleado llama al robot móvil a través de la interfaz del robot o con un botón instalado, llena el robot con la mercancía y lo envía en su camino con solo un clic en un botón. Las estanterías también se pueden utilizar con un módulo elevador de estantes, por lo que el robot puede levantar y descargar estantes enteros.



**Figura 1.36** Robot móvil MiR200 con un estante estático que transporta instrumentos quirúrgicos entre el almacén y la producción en Argón Medical en Chicago.

**Robots con pallets automatizados:** dentro de la logística, a menudo vemos que los robots móviles remolcan un pallet con una horquilla. El robot móvil puede localizar la horquilla para pallets y transportarla a su destino de forma autónoma. De esta manera, los empleados solo tienen que cargar y descargar el pallet de la horquilla y ahorran un tiempo valioso, ya que no necesitan realizar el transporte ellos mismos.



**Figura 1.37** Robot móvil Mir100 con sistema MiRHooK que remolca pallets. Puede detectar, cargar y descargar la horquilla para pallet de forma autónoma.

**Robots con bandas transportadoras:** los robots móviles pueden desplegarse con un módulo superior de cinta transportadora, de modo que puedan transportar artículos entre sus bandas y las bandas transportadoras fijas. Estos se ven a menudo en soluciones totalmente automatizadas donde los robots móviles mueven artículos entre líneas de producción o desde la línea de producción hasta la entrega. Los robots móviles son el enlace adaptable entre las bandas transportadoras tradicionales y permiten a las empresas ser más eficientes porque pueden transportar artículos de manera flexible entre varias líneas de producción.



**Figura 1.38** Robot móvil MiR100 equipado con una cinta transportadora en Honeywell Safety and Productivity Solutions.

**Robots con manipuladores:** los robots móviles agregan movilidad a los brazos robóticos y se utilizan en producciones y en la logística del almacén, donde se puede automatizar el proceso de recoger productos repetidamente de los estantes del almacén y llevarlos de un lado a otro de los puntos de ubicación. También es aplicable a los almacenes minoristas donde los robots pueden recoger encargos de diferentes lugares y entregarlos en un área de envío. Estas son tareas monótonas que los robots pueden realizar y liberan al personal para tareas más valiosas. Tanto los robots móviles como los brazos robóticos son colaborativos y pueden trabajar junto a los humanos sin ninguna seguridad adicional.



**Figura 1.39** Robot móvil Mir100 con brazo robótico UR3 que recoge artículos en un almacén.

## **1.6.2 Instalaciones Médicas Hospitalarias**

Los robots industriales móviles tienen varios usos dentro de la industria de la salud tanto en hospitales como en hogares. Las aplicaciones médicas son siempre un campo en crecimiento con enormes aplicaciones sin explotar como la administración de medicamentos, los servicios al paciente o el desarrollo de sistemas de tratamiento móviles para equipos especializados.

Las enfermeras y otros profesionales médicos pasan mucho tiempo yendo y viniendo por las instalaciones médicas, haciendo cosas como atender a los pacientes, agarrar suministros y responder a las llamadas de los médicos. Los robots móviles pueden aliviar gran parte de este trabajo preliminar. Podrían trasladar a los pacientes, reunir y transportar suministros, ayudar con los procedimientos quirúrgicos e incluso desinfectar las habitaciones. Los robots podrían reducir la cantidad de tareas tediosas, reducir la tensión y las lesiones en el lugar de trabajo y garantizar una calidad de atención más constante.

Por ejemplo, el Instituto de Innovación de Investigación Médica de Texas en Houston ha probado el robot colaborativo YuMi de ABB como técnico de laboratorio itinerante (ver Figura 1.40). El robot móvil de dos brazos puede realizar tareas como pipetear líquidos, clasificar tubos de ensayo y transportar equipos.



**Figura 1.40** El robot móvil autónomo YuMi, está diseñado para trabajar junto con el personal médico y los trabajadores de laboratorio.

Según los datos de rendimiento de ABB, YuMi puede ayudar a acelerar las operaciones del laboratorio de investigación y del hospital hasta en un 50%, trabajando las 24 horas del día. Los robots móviles no solo pueden acelerar las operaciones de atención médica, sino que también pueden allanar el camino para una cobertura verdaderamente continua durante todo el día. Las enfermeras y los médicos necesitan descansar, pero los robots móviles no.

Los robots móviles colaborativos también pueden ser empleados como excelentes asistentes hospitalarios, brindando apoyo en quirófanos, UCI o áreas de riesgo para la unidad de atención médica.

### **1.6.3 Información y Atención al Cliente**

Si bien los chatbots y las herramientas de comunicación basadas en software han sido un elemento básico de las industrias de hotelería y el comercio minorista durante años, la tecnología ha adoptado formas más físicas. Desde el hotel con personal robótico de Japón hasta Rollbot, que puede llevar a los huéspedes un rollo de papel higiénico, la tecnología promete mejorar la experiencia de los clientes.

Con escasez de personal, los robots móviles pueden ayudar a atender las necesidades de los clientes. Imagine botones robóticos que pueden llevar el equipaje a su habitación, servicio de habitaciones las 24 horas (tal vez provisto de un refrigerador y/o una cocina robótica) o carritos de compras autónomos que se desplazarán solos por una tienda.

Para mencionar otro ejemplo del mundo real, en el 2014 el conglomerado tecnológico japonés SoftBank presentó los robots Pepper que están diseñados para ser plataformas de detección de emociones que pueden funcionar en roles rutinarios de cara al cliente en tiendas, hoteles y restaurantes. Muchos se implementan en tiendas SoftBank, supermercados Carrefour, centros comerciales, cafeterías Nestlé e incluso en algunos aeropuertos.



**Figura 1.41** Robot móvil Pepper empleado para la atención al cliente en un supermercado.

#### **1.6.4 Sector Agrícola**

Las tareas del campo suelen ser desgastantes y repetitivas, por lo cual deberían ser altamente automatizables. De hecho, para facilitar estas tareas se han diseñado tractores, cosechadoras y vibradores de sarmientos (para recolección automática) o de olivos (para recogida de aceituna), pero todos ellos necesitan del control de una persona para ejecutar su tarea, por lo que no pueden ser reconocidos como robots.

La automatización total de estas tareas conlleva grandes dificultades técnicas, sin embargo, en los últimos años se están originando progresos en este sentido y se han desarrollado las primeras versiones comerciales de recolectoras automáticas o robots para invernaderos automatizados. Se muestran dos ejemplos en la Figura 1.42.



**Figura 1.42 a)** Recolectora automática de fresas (Agrobot), **b)** Vivero automatizado (Harvest Automation).

En el año 2019, muchos agricultores y empresas agrícolas comenzaron a recurrir a robots móviles para mantener, medir y cosechar productos frescos, entre muchas otras aplicaciones. El robot autónomo Mamut de Cambridge Consultants es una de esas máquinas, diseñada para explorar campos activos y capturar datos útiles a nivel de plantas individuales y a gran escala, que pueden ayudar a mejorar el rendimiento de los cultivos. Debido a que el proceso de recopilación de datos está completamente automatizado, elimina la necesidad de que los agricultores y las cuadrillas examinen minuciosamente los campos.



**Figura 1.43** Robot móvil con ruedas Mamut aplicado en campo de la agricultura.

Mamut es más útil que los drones porque está basado en locomoción terrestre para una mayor resistencia y puede recopilar más información. Ya sea por sí solos, con mejoras a los equipos existentes o en combinación con drones aéreos, los robots agrícolas móviles pueden ayudar a manejar las infestaciones de plagas, medir la calidad del suelo y los pesticidas, así como cosechar frutas y verduras.

Para proteger las tierras de cultivo contra las plagas, existen también robots móviles de control, los cuales utilizan diferentes métodos para ahuyentar por ejemplo a las aves. Todos ellos pueden proteger huertos y campos cultivados de bandadas de pájaros en modo automático, con poca o ninguna intervención humana. Los robots colaborativos actualmente se usan por lo común en la recolección de frutas, el injerto y el cultivo de insectos, donde la inteligencia artificial provee datos predictivos para optimizar los procesos en granjas y plantaciones.

### 1.6.5 Transporte y Entrega de Mercancías

Diversos medios de transporte (por ejemplo, aviones o trenes) poseen un alto grado de automatización desde hace décadas debido a la aparición de los pilotos automáticos, no obstante, necesitan supervisión humana en todo caso. Sin embargo, la robótica está siendo aprovechada en el transporte de pasajeros con automóviles para desarrollar vehículos autónomos; y ello gracias, en gran medida, al soporte de multinacionales como Google.



**Figura 1.44 a)** Primera generación de Google Car adaptando un coche comercial (Toyota Prius), **b)** Waymo One diseñado para ser autónomo (sin volante ni pedales).

La empresa Google Car desarrolló el proyecto *Google Driverless Car* (automóvil sin conductor de Google), un coche automático que puede desenvolverse en entornos urbanos siguiendo la señalización de tráfico gracias a un conjunto de sensores muy avanzado. En 2012 se presentó un primer modelo de este coche automático basado en un automóvil comercial de tipo turístico (Toyota Prius), mientras que en 2014 se reveló un vehículo específicamente diseñado para funcionar sin conductor (Firefly). En el 2016 la unidad Google Car pasó a llamarse Waymo y en diciembre de 2018 lanzó el servicio comercial de vehículos autónomos llamado “Waymo One”, que permite a los usuarios del área metropolitana de Phoenix emplear una aplicación y pedir un servicio de recogida. En noviembre de 2019, Waymo One fue el primer servicio

autónomo en todo el mundo que operaba sin conductores de seguridad en el automóvil. Este es, posiblemente, el proyecto que mayor atención mediática ha recibido, pero compañías automovilísticas como Audi o BMW están desarrollando también sus propios proyectos de vehículos autónomos.

Conjuntamente el transporte de pasajeros y de mercancías automatizado está sufriendo un considerable desarrollo. Desde hace un par de años, empresas como Alphabet, Amazon, FedEx y UPS han estado trabajando en drones para entregas de paquetes locales. Sin embargo, los problemas de seguridad de los propios robots, dificultades legales de ocupación del espacio aéreo, una variedad de alternativas en competencia y los desafíos técnicos han ralentizado el progreso de plasmar esta idea. Aun así, los robots móviles y los drones no solo podrían acelerar los tiempos de entrega, sino que también podrían reducir el impacto ambiental de los muchos camiones en la carretera.

A pesar de lo mencionado, Amazon ha desatado un pequeño ejército de robots de entrega basados en ruedas llamado Amazon Scout (Figura 1.45). No es exagerado predecir que habrá muchos más de estos robots móviles durante los próximos años, particularmente de algunas de las otras compañías en el campo del envío.



**Figura 1.45** Robot móvil con ruedas Amazon Scout utilizado para transporte y entrega de paquetes.

También la compañía FedEx ya cuenta con un robot de entrega autónomo en uso y que apareció por primera vez en el verano de 2019. Si bien UPS aún no ha seguido su ejemplo, otras empresas lo han hecho, incluidas Starship Technologies, la marca de comestibles Kroger, General Motors y DoorDash's Nuro.

### 1.6.6 Limpieza

La limpieza de viviendas y edificios es otra de esas tareas pesadas que todos debemos llevar a cabo en nuestros hogares y otro tipo de instalaciones. Actualmente existen robots comerciales que permiten aspirar, restregar y barrer pisos en viviendas, hospitales, edificios industriales y de oficinas, entre otros. Por ello, este campo se ha convertido en uno de los motores económicos de la revolución de la robótica de servicios.

La empresa americana iRobot lanzó al mercado en el año 2002 su robot aspiradora Roomba, un robot completamente autónomo que contaba con un algoritmo SLAM que le permitía generar un mapa de la vivienda que estuviese limpiando, para conocer los puntos por los que se había movilizado anteriormente y cuáles tenía que volver a transitar para asegurar la limpieza. Para febrero de 2014 ya se habían vendido más de 10 millones de unidades de este robot, lo que da una idea del volumen de negocio que maneja.



**Figura 1.46** a) Robot Roomba de última generación, b) Ejemplo de movimiento por una superficie.

Además de este gigantesco triunfo de la robótica en las tareas cotidianas, se han desarrollado robots para limpieza de fondos de piscinas, corte de césped, limpieza de canalones o encerado de superficies.

Un caso específico de robot de limpieza es el implementado en el MIT para limpiar superficies marinas. Este robot acuático permite recolectar manchas de petróleo o productos contaminantes similares de las superficies marinas con una grandísima eficiencia, de modo que se reduzca el daño ecológico producido, por ejemplo, por el naufragio de buques petroleros.



a)

b)

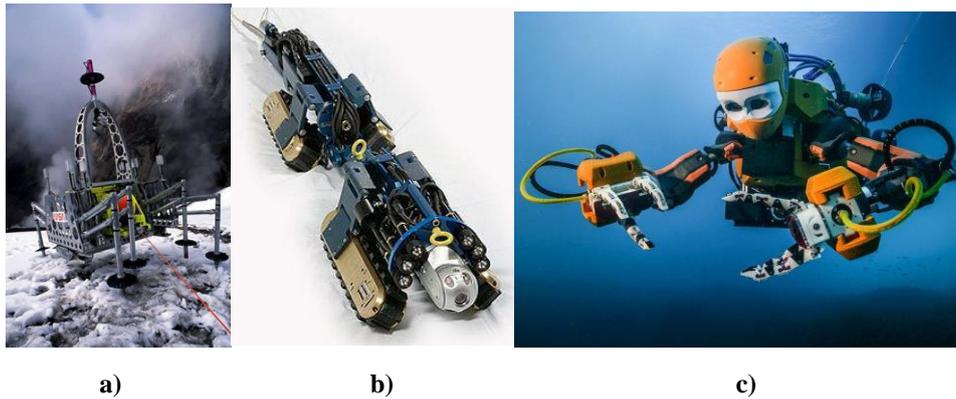
**Figura 1.47** a) Prototipo de Seawarm en operación, b) Infografía de la operación de limpieza en grupo.

### 1.6.7 Exploración y Manipulación en Entornos Riesgosos

Las tareas de inspección y mantenimiento pueden conllevar riesgos y significar tener que operar en áreas inseguras, por lo que los robots móviles pueden ser de gran ayuda para perfeccionar estos procesos y superar dificultades desenvolviéndose por entornos inaccesibles para el hombre, como tuberías, volcanes o lugares en los que existe riesgo biológico. En las plantas de energía nuclear, los robots pueden subsanar desperfectos de los sistemas electrónicos y mecánicos, lo que impide la exposición del ser humano a grandes cantidades de radiación.

Varias configuraciones de robots móviles pueden ingresar a espacios que el ser humano promedio no puede, así como soportar la exposición directa a químicos peligrosos, calor y llamas e incluso escombros generalizados. La robótica móvil también es ideal para situaciones de recuperación de desastres y rescate de emergencia. Es el caso de los robots de rescate autónomos que pueden detectar la presencia de gases o realizar operaciones de búsqueda, deben de contar con una herramienta automatizada con sensores y GPS controlados por unidades de emergencia para maniobrar más rápido y con menor riesgo.

Uno de los primeros robots móviles aplicados en procesos de exploración fue Dante II, un robot octópodo desarrollado por CMU que se utilizó como explorador de volcanes. Su objetivo era conseguir muestras de gas y de roca, muy requeridas por los vulcanólogos, en ambientes de muy altas temperaturas peligrosas para el ser humano. En otro campo de aplicación diferente tenemos la gama Versatrax, un robot con locomoción de oruga con la capacidad de reconfigurarse para adecuarse al entorno que tiene que transitar; puede superar obstáculos o adentrarse en tuberías.



**Figura 1.48** Robots exploradores: a) Dante II, b) Versatrax, c) Ocean One.

También, existen robots de exploración submarina, por ejemplo, Ocean One, un robot humanoide submarino que permite a los pilotos humanos explorar las profundidades del océano. El robot puede realizar operaciones comunes a los buzos humanos que incluyen el ensamblaje de estructuras y el manejo delicado de muestras, artefactos y otros objetos de forma irregular. El diseño de Ocean One integra completamente la navegación con la manipulación bimanual y las capacidades de visión estéreo.

Los robots exploradores también han encontrado aplicabilidad en el campo militar y policial para la prevención del terrorismo, el control de desastres, desactivar o limpiar dispositivos explosivos. Por ejemplo, el robot móvil PackBot es un pequeño robot con orugas desarrollado para las Fuerzas Armadas por iRobot Corporation y que está equipado con un manipulador y una cámara. El robot ha sido diseñado para subir escaleras fácilmente, rodar sobre escombros y navegar por pasillos estrechos y retorcidos. Su estructura flexible le permite atravesar rocas, barro, nieve, grava y otros terrenos difíciles, incluso sube pendientes de hasta 60 grados lo cual lo convierten en un robot móvil ideal para una amplia variedad de misiones de exploración y manipulación de objetos ante posibles desastres naturales o no. Una vez desplegado, el robot puede penetrar rápidamente edificios derrumbados, alcantarillas, túneles, pasillos de aviones, vagones de ferrocarril y otras áreas que son inaccesibles o peligrosas.

Un ejemplo relevante de la importancia de la autonomía y la toma de decisiones de los robots móviles autónomos es el de los mars rovers (vehículos todoterreno empleado para la exploración de Marte), que son colocados en un ambiente completamente inexplorado donde deben ser capaces de movilizarse de forma autónoma, puesto que manipularlos desde la Tierra supondría, de media, una demora de unos nueve minutos desde que se solicita un movimiento hasta que se recibe la contestación desde Marte.



a)

b)

**Figura 1.49** a) Robot móvil PackBot, b) Evolución de los mars rovers hasta la actualidad.

### 1.6.8 Mantenimiento y Reparación de Aeronaves

Los robots móviles manipuladores pueden ser particularmente útiles en aplicaciones mantenimiento y reparación de aeronaves, como por ejemplo la colocación y eliminación de pintura de las mimas. La movilidad es una ventaja que le brinda versatilidad a los robots en el proceso de pintar o retirar pintura de estructuras muy grandes como los aviones. Dos robots fijos no pueden pintar una aeronave completa entre ellos porque no pueden llegar a todas partes y el hecho de agregar más robots fijos para completar la tarea constituiría demasiado hardware con muy poco rendimiento y rentabilidad. Si se utilizan uno o dos robots móviles para realizar la misma actividad, estos pueden ser suficientes para dar servicio a toda la aeronave porque pueden moverse a cualquier área que necesite trabajo.



**Figura 1.50** Robot móvil manipulador KUKA MOIROS en el proceso de pulido de una sección de una aeronave.

Hay que considerar que los robots móviles deben ser verdaderamente autónomos para ser útiles en cualquier proceso de reparación y mantenimiento. Los sistemas automatizados de inspección de aeronaves basados en robots móviles tienen el potencial de hacer que el mantenimiento de aeronaves sea más seguro y confiable. Actualmente se están desarrollando varias soluciones: un robot móvil colaborativo llamado Air-Cobot y drones autónomos de Donecle o EasyJet.



a)

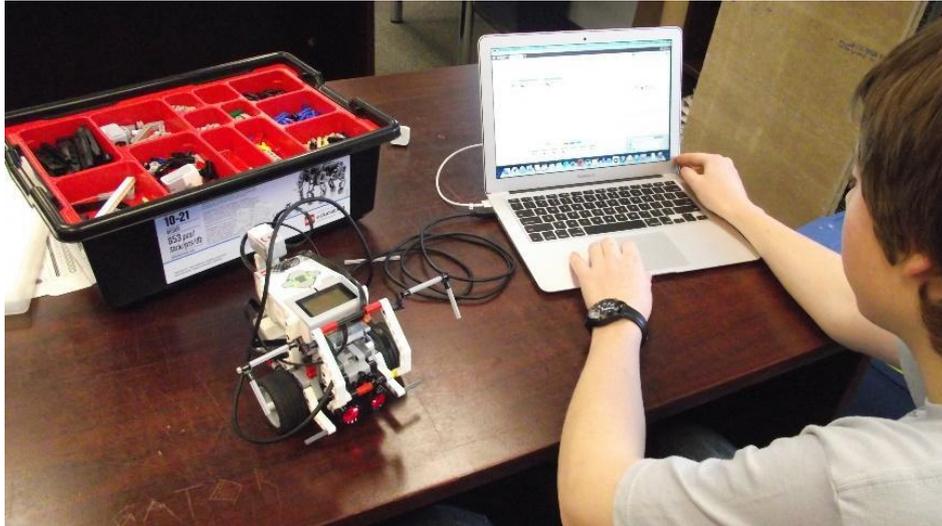
b)

**Figura 1.51** Robots móviles utilizados en procesos de inspección de aeronaves: **a)** Robot móvil con ruedas Air-Cobot, **b)** Robot Advanced Inspection Drone.

### 1.6.9 Robótica Educativa

Se ha comprobado que el uso y aplicación de los robots (móviles o fijos) en cualquier etapa de la formación académica (jardín, escuela, colegio e incluso universidad) dentro de las aulas de clases sirve de apoyo para el fortalecimiento de áreas específicas del conocimiento y habilidades que los estudiantes desarrollan a través del diseño, creación, ensamblaje, programación y operación del robot. Esta forma de aprender contiene un elemento muy importante y es el “aprendizaje lúdico” o aprender a través del juego. Junto con las competencias técnicas, combinar este método con el trabajo de equipo mejora también las habilidades sociales y la motivación para el aprendizaje.

Una amplia variedad de kits robóticos STEAM (ciencia, tecnología, ingeniería, arte y matemáticas) están destinados a inspirar a los jóvenes (y adultos) y ayudarlos a aprender a codificar. Por ejemplo, el área Lego Education Robotix de la compañía Lego nace en el año 2000 con el fin de promover y desarrollar soluciones de aprendizaje en centros educativos. Esta propuesta se encuentra estrechamente comprometida con la enseñanza y el aprendizaje de la robótica mediante programación y metodología STEAM.



**Figura 1.52** Kit para robótica educativa Lego Mindstorm EV3.

La metodología Lego Education admite que los estudiantes descubran y experimenten de manera autónoma un aprendizaje funcional. Los participantes pueden observar el resultado de sus programaciones y vincular sus conocimientos con la manera de imaginar el mundo real. Construir y programar robots les provee motivación, seguridad y un sentido de ganancia para continuar trabajando y descubrir futuras vocaciones. Dado que la tecnología se ha convertido en una parte increíblemente vital de la vida moderna, aparecerán muchas más aplicaciones educativas durante los próximos años.

### **1.6.10 Aplicaciones y Expectativas Futuras**

Basado en la gran cantidad de aplicaciones que existen actualmente para robots móviles, el futuro es brillante. La tecnología ofrece oportunidades casi ilimitadas, ya que puede desempeñar un papel no solo en docenas de industrias, sino también de muchas formas diferentes dentro de cada campo, desde el servicio al cliente hasta la recuperación ante desastres, los robots móviles desempeñarán un papel protagonista en nuestro futuro.

Actualmente los algoritmos de inteligencia artificial y de aprendizaje automático se han vuelto más eficientes y con miras a seguir evolucionando, lo que está facilitando la programación de los robots, el diseño de casos de uso innovadores y la reducción de los requisitos de energía. Los avances sin precedentes en la tecnología de sensores, la potencia informática y el procesamiento de datos están proporcionando a los robots capacidades de inteligencia artificial

sólidas, permitiéndoles conectarse fácilmente a otros robots y también conectarse a una gama completa de herramientas de IoT (*Internet Of Things*), la nube y otros dispositivos, lo cual incrementará la gama de aplicaciones en donde los robots móviles se podrían utilizar.

Bill Gates (cofundador y presidente de Microsoft, la compañía de software más grande del mundo) está de acuerdo con esta tendencia creciente en el campo tecnológico de la robótica, tanto es así que en el año 2007 expresó lo siguiente: “Cuando veo las tendencias que comienzan a surgir, puedo visionar un futuro en el que los sistemas robóticos estarán en todas partes de nuestra vida diaria. Los retos a los que se enfrenta la industria de la robótica son similares a los que acometimos en la informática tres décadas atrás”. Mientras tanto, algunas de las mejores mentes, científicos e investigadores del mundo están consiguiendo resolver los problemas más difíciles de la robótica, como el reconocimiento visual, la navegación y el aprendizaje automático.

Según un estudio de mercado titulado como “*Advanced Robotics in the Factory of the Future*” realizado por el Boston Consulting Group en el año 2019, determinó que las capacidades derivadas por los avances de la robótica permitirán la ejecución de nuevas aplicaciones en las operaciones de las fábricas. En el artículo también se manifiesta que los robots avanzados podrán completar tareas que impliquen movimiento a través de grandes espacios de trabajo, como montar piezas en varios lugares o procesar piezas de trabajo grandes. Las aplicaciones que se están probando en implementaciones piloto incluyen el uso de robots móviles autónomos para realizar procesos de ensamblaje automatizado ergonómicamente desafiantes. Sin embargo, serán necesarios varios años de investigación y pruebas adicionales por parte de los fabricantes y productores de robots antes de que las aplicaciones móviles se puedan implementar por completo. Entre los participantes del estudio, las expectativas de que varias aplicaciones industriales se volverán muy importantes para 2025 oscilaron entre:

- Selección, envasado y paletizado autónomos
- Movimiento de equipos de prueba hacia los productos
- Inspecciones autónomas de calidad
- Apoyo a los procesos manuales
- Montaje de piezas en múltiples ubicaciones de la instalación
- Máquinas de carga y descarga
- Procesamiento de piezas de trabajo de forma autónoma

- Transporte automático de mercancías dentro de la fábrica
- Equipamiento autónomo
- Procesamiento móvil de grandes piezas de trabajo

No es de extrañar que multinacionales como Google hayan comenzado a posicionarse en la que se espera sea la revolución del siglo XXI mediante la adquisición de algunas de las empresas más importantes en I+D relacionado con la robótica, como Redwood Robotics, dedicada al diseño de brazos robóticos de bajo coste; Schaft, una empresa de diseño de humanoides que ha sobresalido en las pruebas clasificatorias del DARPA Robotics Challenge; e inclusive Boston Dynamics, la compañía con mayor proyección y más impacto mediático en el campo de la robótica gracias a sus diseños para aplicaciones militares, como Spot Mini o Atlas (Figura 1.35).

## Referencias

- [1] A. Vázquez, F. Ramos, R. Fernández, I. Payo and A. Adán. Robótica Educativa. RA-MA, Madrid, España, 2015.
- [2] A. Barrientos, L.F. Peñín, C. Balaguer, y R. Aracil. Fundamentos de Robótica. McGraw-Hill, Madrid, 2007.
- [3] B. Siciliano, and O. Khatib, eds. Springer Handbook of Robotics. Springer, Berlin, 2016.
- [4] J. Salido. Cibernética Aplicada Robots Educativos. Alfaomega Grupo Editor, México, 2010.
- [5] R. Miranda. Cinemática y Dinámica de Robots Manipuladores. Alfaomega, México, 2016.
- [6] V. Barrientos, J. García y R. Silva. Robots Móviles: Evolución y Estado del Arte. Polibits, núm. 35, 2007, pp. 12-17.
- [7] SG. Tzafestas. Introduction to Mobile Robot Control. Elsevier, Athens, Greece, 2014.
- [8] G. Dudek, and M. Jenkin. Computational Principles of Mobile Robotics, Cambridge University Press, New York, 2010.
- [9] J. Figueroa, A. Palaguachi. Diseño y Elaboración de Guías de Laboratorio para la Plataforma Móvil Labview Robotics SBRIO Starter Kit de National Instrument. Escuela Politécnica del Ejército, Quito, Ecuador, 2012.
- [10] R.García, M. Arias. Prototipo virtual de un robot móvil multi-terreno para aplicaciones de búsqueda y rescate. Asociación Mexicana de Mecatrónica, 2016.

- [11] IL. Bambino. Una Introducción a los Robots Móviles. 2008. website: [https://sistemamid.com/panel/uploads/biblioteca/2017-01-01\\_09-42-20138787.pdf](https://sistemamid.com/panel/uploads/biblioteca/2017-01-01_09-42-20138787.pdf)
- [12] R. Siegwart, R.I. Nourbakhsh, and D. Scaramuzza. Introduction to Autonomous Mobile Robots. MIT Press, London, England, 2011.
- [13] G. Klančar, A. Zdešar, S. Blažic, and I. Škrjanc. Wheeled Mobile Robotics: From Fundamentals Towards Autonomous Systems. Butterworth-Heinemann Elsevier, Ljubljana, Slovenia, 2017.
- [14] A. Kelly. Mobile Robotics: Mathematics, Models, and Methods. Cambridge University Press, New York, USA, 2013.
- [15] Robot Platform. Classification of robots. website: [http://www.robotplatform.com/knowledge/Classification\\_of\\_Robots/Classification\\_of\\_Robots.html](http://www.robotplatform.com/knowledge/Classification_of_Robots/Classification_of_Robots.html)
- [16] S. Bøgh, M. Hvilshøj, M. Kristiansen, and O. Madsen. Autonomous Industrial Mobile Manipulation (AIMM): From Research to Industry, presented at the Automate 2011.
- [17] R. Bostelman, J. Marvel, and T. Hong. Survey of Research for Performance Measurement of Mobile Manipulators, presented at the Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology 2016.
- [18] A. Markis, D. Kaselautzke, M. Papa, and V. Sattinger. Safety of Mobile Robot Systems in Industrial Applications, presented at ARW& OAGM Workshop 2019.
- [19] K. Matthews. (2020). Where to spot mobile robots in 2020. website: <https://www.cobottrends.com/where-spot-mobile-robots-2020/>
- [20] SMP Robotics. (2021). Application of Autonomous Mobile Robots. Cost-effective solutions for the usage of autonomous mobile robots. website: [https://smprobotics.com/application\\_autonomus\\_mobile\\_robots/](https://smprobotics.com/application_autonomus_mobile_robots/)
- [21] Mobile Industrial Robots A/S. (2021). Five Autonomous Mobile Robots Applications. website: <https://www.mobile-industrial-robots.com/en/insights/get-started-with-amrs/5-autonomous-mobile-robots-applications/>
- [22] D. Küpper et al. (2019). Advanced Robotics in the Factory of the Future. website: <https://www.bcg.com/publications/2019/advanced-robotics-factory-future>
- [23] Robotpark. (2020). All Types of Robots - By Locomotion. website: <http://www.robotpark.com/All-Types-Of-Robots>

## Capítulo 2

# Locomoción de Robots Móviles con Ruedas

### 2.1 Introducción

La locomoción hace referencia al movimiento que realiza un animal, un microorganismo, un aparato o máquina para moverse de un lugar a otro, para trasladarse en el espacio. La locomoción varía en términos de forma, estructura, velocidad y otros elementos de acuerdo al tipo de sujeto al que hagamos referencia [1]. La mayoría de las especies animales poseen la capacidad de locomoción, mientras que algunos animales usan sistemas pasivos para hacerlo (pueden moverse siguiendo el movimiento del agua o del aire), otros han desarrollado mecanismos más o menos sofisticados para el movimiento activo. Algunos animales realizan la locomoción en el espacio 3D (volando en el aire, nadando en el agua, moviéndose sobre el suelo) y otros más o menos siguen la superficie 2D del agua o el suelo, mientras que algunos animales son capaces de combinar diferentes formas de movimiento [1].

La locomoción proviene del fenómeno físico conocido como movimiento, así el movimiento siempre significa un cambio de posición en el espacio. La locomoción es el movimiento que permite que el sujeto (ya sea una persona o una máquina) se desplace y, además de adquirir otra posición, cambie de lugar. La locomoción es una posibilidad que sólo tienen los seres vivos y algunas máquinas o aparatos creados por el ser humano que, de todas maneras, deben contar con algún método de propulsión como motores o energía [2-3].

En el contexto de los robots móviles, nos interesan los sistemas que pueden moverse utilizando su aparato de locomoción, este último muy a menudo imita el de un humano o un animal determinado. La copia de sistemas biológicos también resuelve muy a menudo con éxito algunos problemas técnicos que surgen durante el diseño del sistema de locomoción artificial, considerando que la característica más importante de los robots móviles es su capacidad de desplazamiento. Otro aspecto importante de un sistema móvil es que debe poseer un cierto nivel de autonomía, lo que significa que debe moverse por el espacio sin la ayuda del operador o aceptar los comandos de un operador distante, lo que significa que el sistema puede moverse teleoperado [6-7].

El objetivo de este capítulo es el de presentar las diferentes estrategias de locomoción de los robots móviles terrestres basados en ruedas, en particular, el capítulo:

- Describe el funcionamiento de los diferentes tipos de ruedas utilizadas en los robots móviles;
- Analiza varias de las configuraciones estructurales empleadas en los diseños de robots móviles basadas en la cantidad y tipos de ruedas, indicando al mismo tiempo sus limitaciones de locomoción; y
- Se mencionan ciertos aspectos generales de la locomoción terrestre mediante orugas y algunas configuraciones híbridas que involucran el uso de ruedas.

## **2.2 Locomoción mediante Ruedas**

Los robots móviles con ruedas (*WMR, Wheeled Mobile Robots*) se utilizan ampliamente en muchas aplicaciones del campo de la Robótica Autónoma. Las ruedas son los elementos que proporcionan la capacidad de movilidad a estos robots y son el medio más utilizado para el desplazamiento. A pesar de que las ruedas, como tales, no existen como medio de transporte en la naturaleza, gracias a ellas el ser humano ha conseguido movilizarse largas distancias y mecanizar tareas que anteriormente no estaban a su alcance. El tamaño de las ruedas de un robot se elige en función de las dimensiones de este [8-10].

En general, los robots con ruedas poseen estructuras simples, consumen menos energía y se mueven más rápido que otros mecanismos de locomoción (por ejemplo, robots con patas o con orugas). Desde el punto de vista del control, se requiere un menor esfuerzo de control, debido a sus mecanismos simples y reducidos problemas de estabilidad. Aunque es difícil superar terrenos accidentados o condiciones de terreno irregulares, los robots móviles con ruedas son adecuados para una variedad de entornos en aplicaciones prácticas. Se emplean en casi todas las aplicaciones de robots de servicio en el interior de edificios y también en exteriores cuando el terreno no es demasiado abrupto [1, 5].

Los principales problemas en el diseño de los robots móviles con ruedas son la tracción, la maniobrabilidad, la estabilidad y el control que dependen de los tipos de ruedas y configuraciones (sistemas de tracción) [1].

## 2.3 Tipos de Ruedas

La primera decisión que se debe tomar para diseñar un nuevo robot móvil con ruedas suele ser la determinación de los tipos de rueda que se utilizarán para el diseño. Según el tipo de rueda, se presentan características diferentes en el movimiento que desarrolla el robot, el cual puede ser o no un desplazamiento omnidireccional, es decir, se puede mover en cualquier dirección del plano donde se ubica. Esta característica es conocida también como holonomía, la capacidad de desplazarse en cualquier instante del tiempo, en cualquier dirección [1-4].

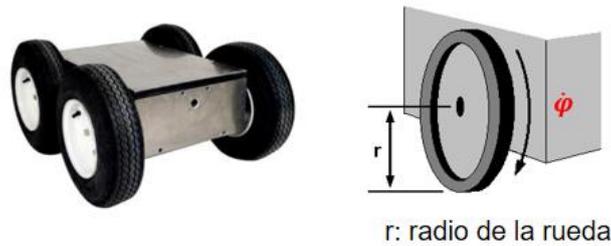
Antes de realizar una clasificación para las ruedas cabe mencionar que en los robots móviles estos elementos pueden tener asociados un actuador (motor eléctrico) o no para su accionamiento. En el primero de los casos se les denomina *ruedas activas* (actuadas, motrices o de tracción) y en el segundo se las conoce como *ruedas pasivas* (libres o auxiliares) las cuales giran libremente sobre sus ejes. Para el caso de las ruedas pasivas el eje de apoyo puede ser fijo u oscilante, este último caso hace referencia a las *ruedas locas* [7, 10].

Cuando pensamos en un diseño de rueda única, se podría inicialmente hacer una clasificación general en dos tipos: ruedas convencionales (estándar) y ruedas especiales (omnidireccionales). A la vez cada una de ellas presentan una subclasificación de acuerdo a ciertas características particulares de diseño, tal y como se presenta a continuación.

### 2.3.1 Ruedas Convencionales o Estándar

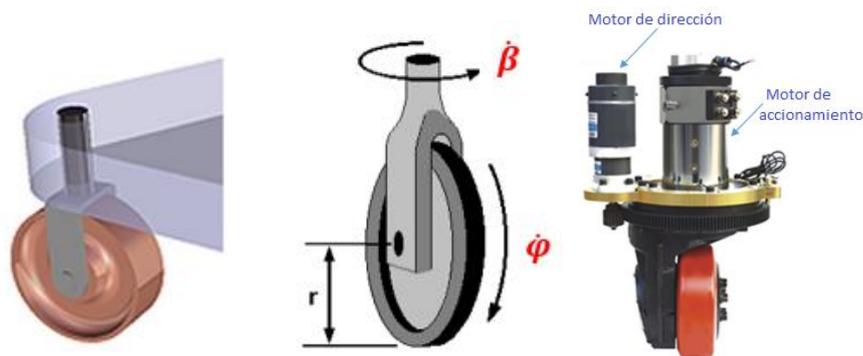
Este tipo de ruedas pueden visualizarse o entenderse como neumáticos convencionales. Estas ruedas se distinguen en ruedas fijas, ruedas orientables centradas y ruedas orientables descentradas (o castor) [1-4, 7].

- a. **Ruedas Fijas:** pueden ser utilizadas como ruedas activas o pasivas, pero en ambos casos están montadas en posiciones fijas del vehículo. Su eje de rotación tiene una dirección fija con respecto al sistema de coordenadas de la plataforma. Giran solo alrededor del eje de la rueda con velocidad de giro  $\dot{\varphi}$  y su orientación  $\beta$  con respecto al chasis se mantiene constante, es decir, que no poseen articulación de dirección.



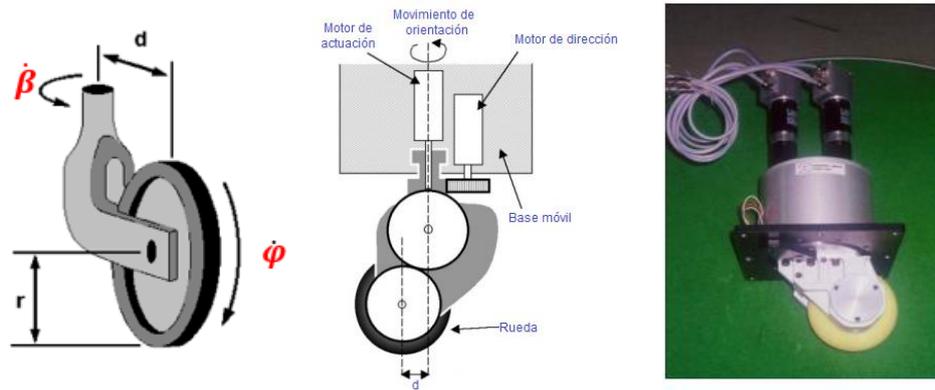
**Figura 2.1** Ejemplo de un robot móvil con ruedas fijas.

- b. **Ruedas Orientables Centradas:** tienen un motor de accionamiento para su rotación  $\varphi$  y pueden direccionarse (orientarse) con un ángulo  $\beta$  alrededor de un eje perpendicular a su eje de rotación mediante otro motor (el eje de orientación pasa por el centro del eje de rotación de la rueda). Giran alrededor del eje de la rueda con velocidad de giro  $\dot{\varphi}$  y su orientación ( $\beta$ ) no es constante, varía a una razón  $\dot{\beta}$  con respecto al tiempo (velocidad de giro alrededor del punto de contacto con el piso). Pueden funcionar como ruedas de tracción-dirección o sólo como de dirección.



**Figura 2.2** Ejemplo de una rueda orientable centrada (pasiva y activa).

- c. **Ruedas Orientables Descentradas o Castor:** pueden ser utilizadas como ruedas activas o pasivas. Poseen articulación de dirección, es decir, es orientable respecto al chasis del robot sin que su eje de dirección pase por el centro de rotación de la rueda. Giran alrededor del eje de la rueda con una velocidad  $\dot{\varphi}$  y rotan alrededor del eje vertical (eje descentrado) ubicado a una distancia  $d$  desde el centro de la rueda con una velocidad  $\dot{\beta}$  (cambia la orientación relativa de la rueda  $\beta$  respecto al chasis). Si  $d$  es libre, puede moverse en cualquier dirección, es decir se consideraría una rueda omnidireccional.



**Figura 2.3** Ejemplo de una rueda orientable descentrada o castor activa.

Las ruedas convencionales tienen una mayor capacidad de carga y una mayor tolerancia a las irregularidades del suelo en comparación con las configuraciones especiales de las ruedas. Pero debido a sus restricciones no holonómicas, no son ruedas verdaderamente omnidireccionales.

### 2.3.2 Ruedas Especiales u Omnidireccionales

Este tipo de ruedas poseen estructuras mecánicas únicas que incluyen rodillos o esferas, que permiten además del giro convencional también el giro lateral, es decir que no restringen el movimiento del robot en comparación con las ruedas convencionales. Estas ruedas están diseñadas de manera que tengan tracción activa en una dirección y movimiento pasivo en otra, permitiendo así una mayor maniobrabilidad en entornos congestionados.

En el sistema de locomoción de un robot móvil se emplean como simples ruedas libres (con mejor comportamiento que las ruedas locas convencionales) o también como ruedas motrices. Tenemos tres tipos principales de ruedas especiales: universal, mecanum y esférica.

- a. **Rueda Universal:** su diseño combina movimientos restringidos y libres durante el giro. Está compuesta por pequeños rodillos pasivos en torno a su diámetro exterior que están acoplados perpendicularmente al eje de rotación de la rueda ( $\gamma = 90^\circ$ ). Los rodillos pasivos pueden girar libremente alrededor del eje de rotación, lo que da como resultado un movimiento lateral de la rueda. Por lo cual, la rueda puede desplazarse en la dirección paralela al eje de la rueda además de rotar sobre el mismo eje.



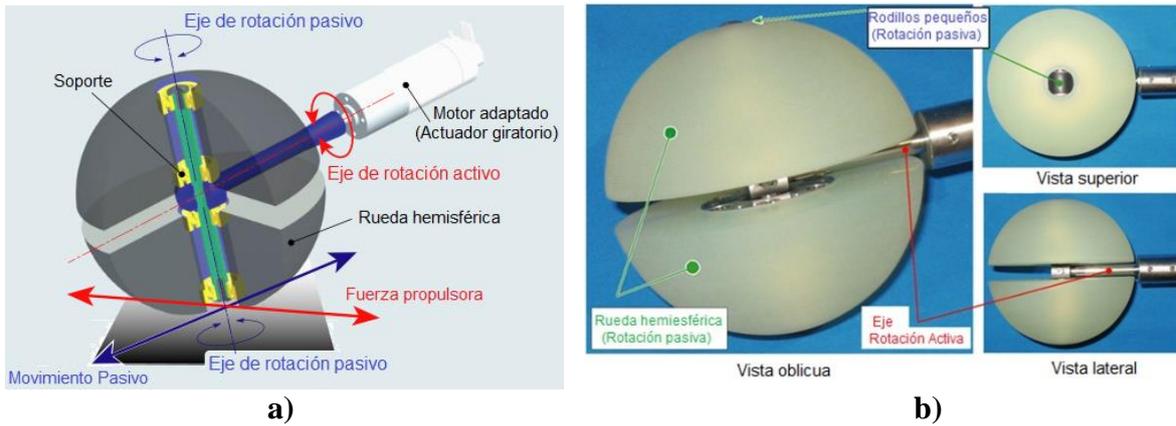
**Figura 2.4.** Cuatro diseños de ruedas universales.

- b. **Rueda Mecanum o Sueca:** su diseño es parecido a la rueda universal, con la diferencia que los rodillos están montados en un ángulo  $\gamma$  distinto de  $90^\circ$ , usualmente  $\gamma = \pm 45^\circ$  (primera alternativa) y  $\gamma = \mp 45^\circ$  (segunda alternativa), según se muestra en la Figura 2.5. La selección de la orientación y por consiguiente el signo de ángulo  $\gamma$  depende de la facilidad de análisis matemático que conlleva determinar la cinemática del robot (esto se explica con mayor detalle en el Capítulo 3). Este tipo de rueda permite un giro (actuado) alrededor del eje de la rueda (con velocidad  $\dot{\phi}$ ) y otro giro (no actuado) de los pequeños rodillos. Es capaz de girar en un plano vertical, así como también de desplazarse en un plano horizontal.



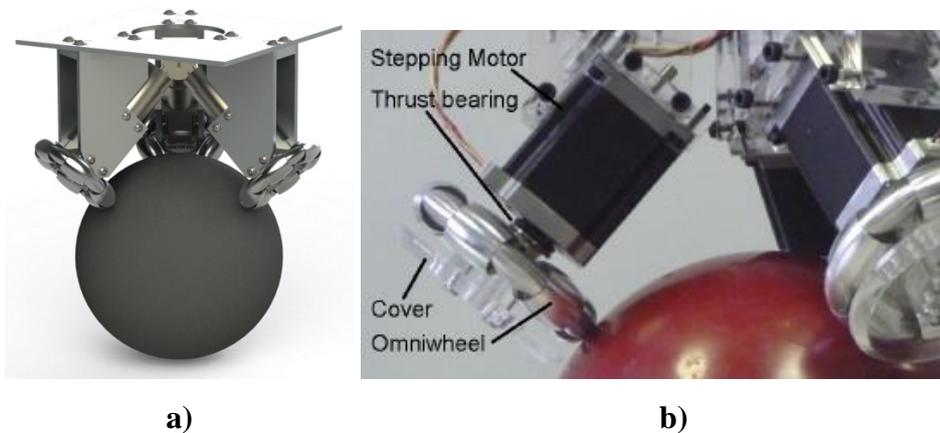
**Figura 2.5** Rueda omnidireccional tipo mecanum o sueca.

- c. **Rueda de Bola o Esférica:** no impone restricciones directas al movimiento, es decir, es omnidireccional como las ruedas castor, universal y mecanum. En este caso, el eje de rotación de la rueda puede ubicarse en cualquier dirección arbitraria. Una alternativa para conseguir esta libertad de movimiento es mediante el empleo de un anillo activo impulsado por un motor y una caja de cambios que permiten trasferir potencia a la bola a través de los rodillos y la fricción, con lo cual esta puede girar en cualquier dirección de forma instantánea. En la Figura 2.6 y Figura 2.7 se muestran dos diseños de ruedas esféricas activas.



**Figura 2.6** Rueda esférica activa desarrollada en el laboratorio Kaneko Higashimori (Universidad de Osaka): **a)** Diseño y ejes de rotación, **b)** Diferentes vistas.

Debido a su difícil construcción, la rueda de bola rara vez se utiliza en la práctica como rueda motriz. Otro inconveniente es que la carga útil que pueden soportar estas ruedas debe ser bastante baja debido al punto de contacto, además la superficie de la esfera puede contaminarse al viajar sobre suelo sucio y es difícil superar las condiciones irregulares del suelo.



**Figura 2.7** Diseño de una rueda esférica activa desarrollada por Kumagai y Ochiai (Universidad de Tohoku Gakuin): **a)** Diseño 3D, **b)** Componentes principales.

El uso más común de las ruedas esféricas es como rueda pasiva, y en tal caso son llamadas ruedas “caster” o ruedas “locas”; cuando son utilizadas para este propósito, sirven como apoyo en el piso y para dar balance estático al robot.



**Figura 2.8** Tres diseños de ruedas esféricas con accionamiento pasivo.

Existen otros tipos de ruedas menos habituales (especiales), en concreto estas son las ruedas dobles y castor doble, que pueden modelarse como dos ruedas castor con un mismo eje de rotación y ángulo de dirección, y las ruedas tipo ortogonal, que pertenecen al grupo de omnidireccionales y que funcionalmente son equivalentes a las ruedas suecas.

## 2.4 Configuraciones Según las Ruedas

La mayoría de los robots móviles con ruedas poseen características particulares que los hacen aptos para una determinada tarea. Es la propia tarea que establece en una primera instancia las peculiaridades estructurales del robot que van desde el tipo de rueda, el sistema de accionamiento, el sistema de dirección y la forma física de la estructura. En una siguiente etapa la tarea y el entorno establecerán las especificaciones sensoriales del robot.

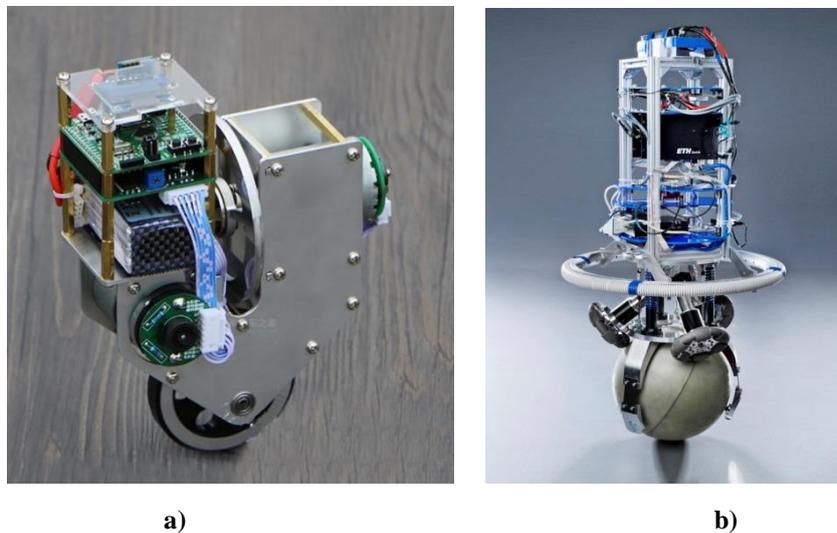
Por lo general los robots móviles con ruedas distribuyen sus sistemas accionamiento y dirección sobre los ejes de sus ruedas acorde a las necesidades de velocidad, maniobrabilidad y particularidades del terreno. La precisión y rapidez con que el robot móvil debe llegar a su meta conlleva a tener un sistema de accionamiento confiable y un sistema de dirección que proporcione la debida maniobrabilidad a la estructura. La confiabilidad y maniobrabilidad que debe poseer el robot, establecen las características del sistema de tracción y dirección, no sólo en lo que conlleva a la técnica, sino también a la cantidad de ruedas necesarias, al tipo y la disposición de éstas para conseguir una estructura mecánica estable [1-7, 17].

La combinación de los diferentes tipos de ruedas conlleva a tener una amplia gama de robots móviles que se diferencian por su grado de maniobrabilidad (tema que será tratado con mayor detalle en el Capítulo 3). A continuación, se presentan brevemente las principales características

de diseño de algunos tipos de robot móviles, clasificándolos de acuerdo con el número de ruedas. Esta descripción no pretende ser exhaustiva, sin embargo, se la ha limitado a diseños concretos de estructuras comúnmente adoptadas.

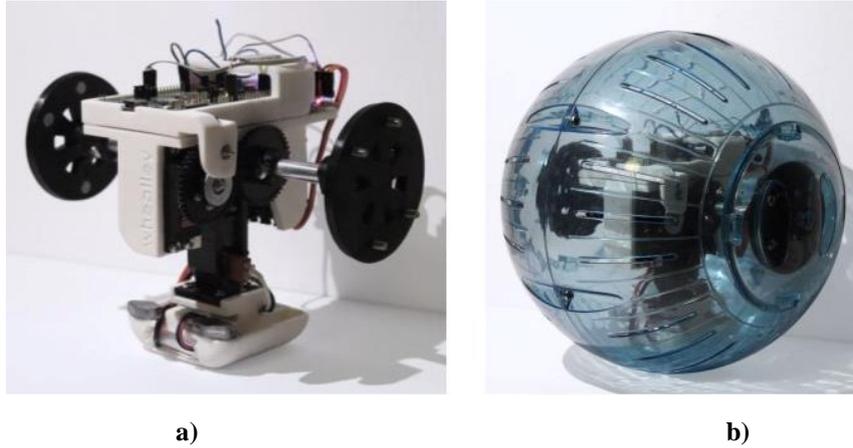
### 2.4.1 Robots con Una Rueda

Un robot con una sola rueda es inestable si no se implementa un control dinámico para mantener el equilibrio del cuerpo; un ejemplo típico es un *monociclo*. Como variación de un monociclo, se puede utilizar un robot con una rueda en forma de pelota rugby para mejorar la estabilidad en la dirección lateral.



**Figura 2.9** Robots monociclos autoequilibrados con control automático PID: **a)** Diseño con rueda convencional, **b)** Diseño con rueda esférica y omnidireccional.

Un *robot esférico* también puede ser considerado como un robot de una sola rueda, el cual emplea una rueda giratoria como mecanismo de equilibrio para lograr la estabilidad dinámica. Este enfoque tiene ventajas que incluyen alta maniobrabilidad y baja resistencia a la rodadura. Sin embargo, los robots de una sola rueda rara vez se utilizan en aplicaciones prácticas, debido a que se requieren mecanismos de equilibrio adicionales, el control es difícil y el cálculo de la posición por estimación pura no está disponible; su uso actualmente se limita a procesos de investigación y a la robótica de entretenimiento.



**Figura 2.10** Robot móvil esférico de Kacper Landa: **a)** Vista de la estructura interna, **b)** Vista exterior.

### 2.4.2 Robots con Dos Ruedas

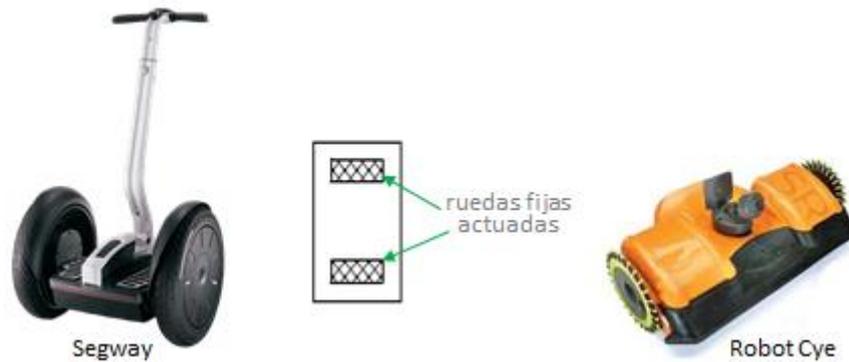
En general, existen dos tipos de robots con dos ruedas: tipo bicicleta y tipo péndulo invertido. En un *robot tipo bicicleta* es común direccionar una rueda delantera (rueda pasiva u orientable) y accionar una rueda trasera fija (rueda motriz o actuada), como si se tratase de una motocicleta. Dado que la estabilidad dinámica de un robot tipo bicicleta aumenta con su velocidad, no se requiere necesariamente un mecanismo de equilibrio. La ventaja de este enfoque es que se puede reducir el ancho del robot. Sin embargo, rara vez se utiliza un robot tipo de bicicleta porque no puede mantener su postura cuando se detiene.



**Figura 2.11** Ejemplo de un robot tipo bicicleta.

Un *robot tipo péndulo invertido* es un robot con accionamiento diferencial de dos ruedas (un motor para cada rueda). Es posible lograr estabilidad estática colocando con precisión el centro de gravedad en el eje de la rueda. Sin embargo, es común aplicar un control de equilibrio dinámico, que es similar al problema de control convencional para un péndulo invertido. El

tamaño de un robot puede ser reducido utilizando robots de dos ruedas, en comparación con robots con más de tres ruedas.



**Figura 2.12** Ejemplos de robots tipo péndulo invertido.

Una aplicación típica de un robot tipo péndulo es diseñar una estructura como un robot de cuatro ruedas, que consta de dos robots péndulos conectados, luego, el robot puede subir escaleras levantando sus ruedas delanteras mientras el robot llega a la escalera. Una gran desventaja es que siempre se requiere un mayor esfuerzo de control para conseguir el equilibrio dinámico.

### **2.4.3 Robots con Tres Ruedas**

Dado que un robot de tres ruedas es estáticamente estable y tiene una estructura simple, es una de las estructuras más utilizadas para robots con ruedas. Existe una gran cantidad de diseños según la elección de los tipos de ruedas individuales. Cada rueda introducida en el apartado 2.2 se puede utilizar para construir robots de tres ruedas. En esta sección, se describen seis ejemplos de diseño populares [1-7, 17]:

1. Robot con accionamiento diferencial
2. Robot con configuración triciclo
3. Robot con accionamiento sincrónico
4. Robot omnidireccional con ruedas universales
5. Robot omnidireccional con ruedas castor
6. Robot omnidireccional con ruedas orientables centradas.

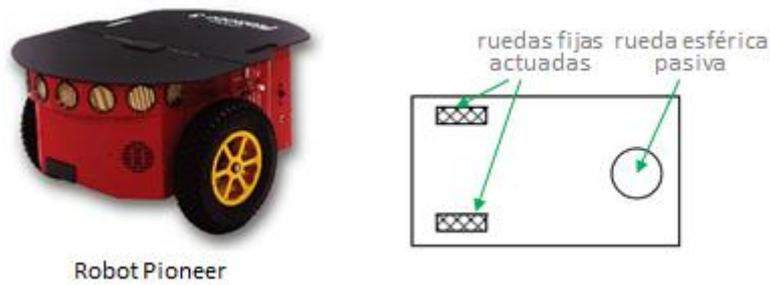
Antes de iniciar la descripción de los seis robots considerados, se debe realizar una definición de los términos robot omnidireccional (holonómico) y robot no-holonómico, puesto que se utilizarán con bastante frecuencia.

Un *robot omnidireccional*, también conocido como *robot holonómico*, es un robot móvil cuya configuración le permite movilizarse en cualquier dirección sin la necesidad de modificar previamente la orientación del chasis (máxima maniobrabilidad), es decir, que tiene la capacidad de generar movimientos en cualquiera de las componentes del plano, ya sean traslaciones (hacia adelante, laterales, en reversa) o rotaciones, sin necesidad de reorientarse, claro está que esto conlleva un mayor grado de complejidad en el proceso de control. Un robot móvil omnidireccional debe contar con al menos tres ruedas activas, por lo común, exhiben una configuración mecánica de tres o cuatro ruedas.

Cuando el robot no se puede mover instantáneamente en todas las direcciones del espacio de trabajo se le denomina *robot no-holonómico*, lo cual indica que el robot móvil debe reubicarse antes de moverse directamente hacia otro objetivo y tiene restricciones en el sentido de que no todas las trayectorias son posibles. Un ejemplo de esto es un automóvil en un estacionamiento: si tiene un automóvil estacionado en un parqueadero y desea moverlo al lugar junto a él, deberá combinar movimientos hacia adelante, atrás y giros para reubicar el vehículo en el nuevo punto; debido a que no puede deslizarse directamente a un lugar adjunto (o realmente a cualquier otro lugar), se considera al automóvil como no holonómico.

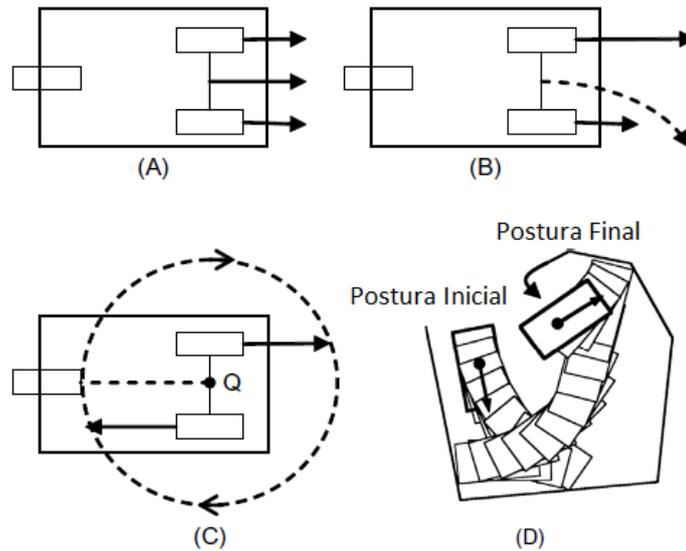
### **2.4.3.1 Robot con Accionamiento Diferencial**

Un robot con accionamiento diferencial es uno de los diseños más populares y el elegido por los investigadores a la hora de probar nuevas estrategias de control por tener una cinemática sencilla. Es una estructura compuesta por dos ruedas fijas activas (colocadas normalmente en la posición delantera del robot) accionadas de forma independiente cada una por un motor y una rueda pasiva tipo castor o esférica (colocada en la parte trasera) que gira libremente según la velocidad y el movimiento del robot, con lo cual se evita que la plataforma bascule manteniendo el equilibrio y la estabilidad. Es posible extenderlo a un robot de cuatro ruedas agregando otra rueda pasiva.



**Figura 2.13** Robot móvil Pioneer de tres ruedas y accionamiento diferencial.

Con este tipo de sistema motriz el control de la trayectoria del robot móvil se logra modificando la velocidad de giro de ambas ruedas. La diferencia de velocidad entre las dos ruedas impulsa al robot en cualquier trayectoria y dirección requeridas, de ahí el nombre de accionamiento diferencial.



**Figura 2.14** Posibilidades de locomoción del accionamiento diferencial: **a)** Camino recto, **b)** Camino curvo, **c)** Camino circular, **d)** Maniobras sin obstáculos para pasar de una postura inicial a una final [7].

Así, cuando las ruedas giran a la misma velocidad, el robot se mueve hacia adelante (giran en el mismo sentido) o hacia atrás (giran en sentido opuesto) describiendo una línea recta. Si una rueda gira más rápido que la otra, el robot sigue una trayectoria curvilínea a lo largo del arco de un círculo instantáneo. Si ambas ruedas giran a la misma velocidad en direcciones opuestas, el robot gira alrededor del punto medio de las dos ruedas motrices, es decir, gira sobre sí mismo, así pues, se trata de una trayectoria con un radio de curvatura nulo. Esta posibilidad de

movimiento permite al robot realizar maniobras de aparcamiento de forma sencilla e incluso el seguimiento de trayectorias complejas. Los modos de locomoción mencionados se ilustran en la Figura 2.14. Claramente, este tipo de robot móvil no puede girar en el instante.

Las principales ventajas del robot se pueden resumir a continuación:

- Estructura mecánica simple
- Modelo cinemático simple
- Bajo costo de fabricación
- Los errores sistemáticos son fáciles de calibrar

Por otro lado, sus inconvenientes son:

- Dificultad de movimiento en superficies irregulares: su orientación puede cambiar abruptamente si una de las ruedas activas pierde contacto con el suelo
- Solo está disponible el movimiento bidireccional

Una de las principales desventajas de esta configuración es que el robot no se conduce como se esperaba, no se mueve en línea recta ni gira exactamente en los ángulos esperados, especialmente cuando se usan motores DC, esto se debe a la diferencia en el número de rotaciones de cada rueda en un período de tiempo determinado. Para manejar este problema, se necesita agregar un factor de corrección a la velocidad del motor. Por ejemplo, si tiene la intención de conducir al robot en una trayectoria lineal y siente que el robot está girando hacia un lado, se puede agregar un factor de corrección para reducir la velocidad de la otra rueda.

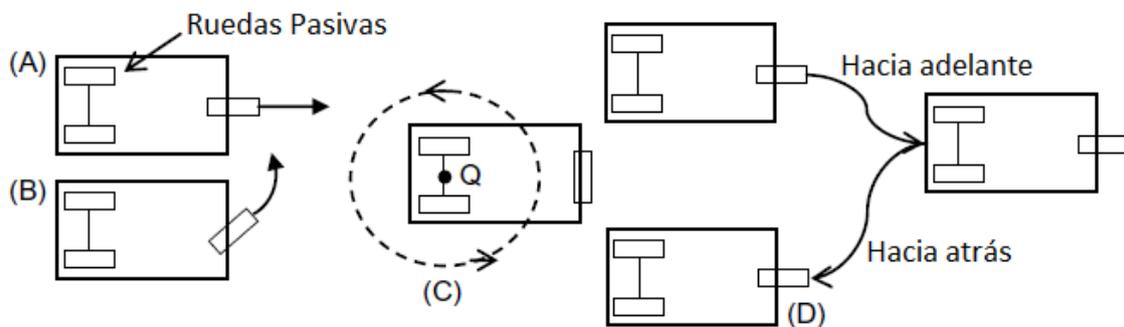
### **2.4.3.2 Robot con Configuración Triciclo**

El robot tipo triciclo está compuesto por una rueda convencional centrada orientable (motorizada) en la parte delantera que sirve tanto para la tracción como para el direccionamiento y dos ruedas convencionales fijas no actuadas (sin motor) sobre un mismo eje en la parte trasera, para tener siempre el contacto requerido de tres puntos y lograr la estabilidad de la estructura, aunque se pueden presentar problemas de estabilidad en terrenos difíciles. Cuando la rueda directriz es simultáneamente motriz, la plataforma móvil presenta mayor capacidad de maniobra, permitiendo giros más cerrados. Las velocidades lineal y angular de la rueda delantera están completamente desacopladas.



**Figura 2.15** Robot MILVA de tres ruedas tipo triciclo.

Para conducir en línea recta, la rueda delantera se coloca en la posición media y se conduce a la velocidad deseada (Figura 2.16A). Cuando la rueda delantera está en ángulo, el vehículo sigue una trayectoria curva (Figura 2.16B). Si la rueda delantera se coloca en  $90^\circ$ , el robot girará siguiendo una trayectoria circular cuyo centro está en el punto medio de las ruedas traseras y no en el centro geométrico del robot (Figura 2.16C), esto significa que este robot no puede girar al instante. Los robots móviles no holonómicos (como los robots de tracción diferencial o los triciclos) no pueden realizar el estacionamiento en paralelo directamente, sino mediante una serie de maniobras con movimientos hacia adelante y hacia atrás, como se muestra en la Figura 2.16D.



**Figura 2.16** Modos de locomoción de un robot tipo triciclo: **a)** Camino recto, **b)** Camino curvo, **c)** Camino circular, **d)** Maniobras para estacionarse [7].

Existe otro diseño de construcción del robot triciclo en el que se utilizan dos motores, uno para la rueda orientable delantera y otro para las dos ruedas fijas traseras. En esta configuración el motor de la rueda delantera solo controla el direccionamiento del robot (es decir hace de volante) y las dos ruedas traseras están unidas a un eje común impulsado por un solo motor con dos grados de libertad (hacia adelante o hacia atrás).

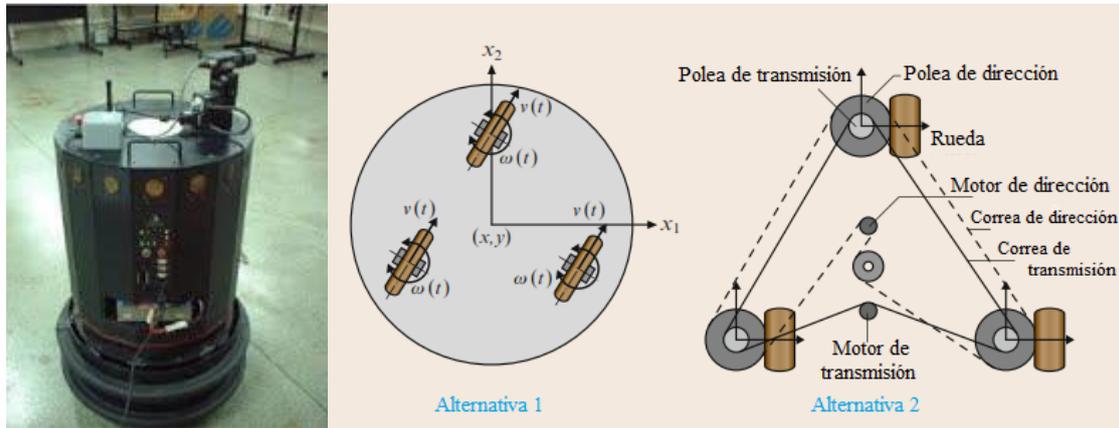
Al igual que en la configuración diferencial, la estructura mecánica y la electrónica de control son sencillas, por dicha razón su análisis cinemático resulta de interés en áreas específicas del control de robots móviles, pero debido a las limitaciones e inconvenientes de diseño no es tan utilizado en la práctica. En cuanto a aplicaciones industriales esta disposición de las ruedas es favorable para el transporte de cargas pesadas a baja velocidad.

### **2.4.3.3 Robot con Accionamiento Sincrónico**

Un robot con accionamiento sincrónico puede ser construido utilizando tres ruedas orientables centradas o descentradas (castor), todas ellas motrices y direccionales simultáneamente. Los movimientos de dirección y accionamiento de cada rueda pueden también estar acoplados mecánicamente mediante cadenas, correas o una transmisión por engranajes, y los movimientos se activan sincrónicamente, por lo que las orientaciones y las velocidades de las ruedas son siempre idénticas. Por tanto, el movimiento omnidireccional, es decir, el movimiento en cualquier dirección se puede lograr dirigiendo las orientaciones de las ruedas a la velocidad deseada.

Pero un robot móvil con accionamiento sincrónico es casi un vehículo holonómico porque puede moverse en cualquier dirección deseada, sin embargo, no puede conducir y girar al mismo tiempo, es como si el robot pudiese “mirar” en una dirección distinta a la de avance. Para cambiar su marcha de adelante hacia los lados, este robot debe detenerse y realinear sus ruedas; a veces se emplea una torreta para cambiar la orientación de la carrocería. Por esta razón, los robots móviles que utilizan accionamiento sincrónico tienen normalmente su estructura dividida en dos partes, permitiendo al torso girar libremente sobre la base y así orientarlo en el sentido de la marcha.

La transmisión sincrónica basada en cadena o correa (alternativa 2 de la Figura 2.17) presenta una menor precisión y alineación de la dirección, este problema no ocurre si se utiliza una transmisión por engranajes. En realidad, se deben utilizar dos subsistemas independientes con accionamiento por motor (que funcionan con cadena, correa y engranaje); uno hace rodar todas las ruedas y el otro las direcciona simultáneamente, como se muestra en la Figura 2.17.



**Figura 2.17** Ejemplo de un robot de tres ruedas con accionamiento sincrónico [2].

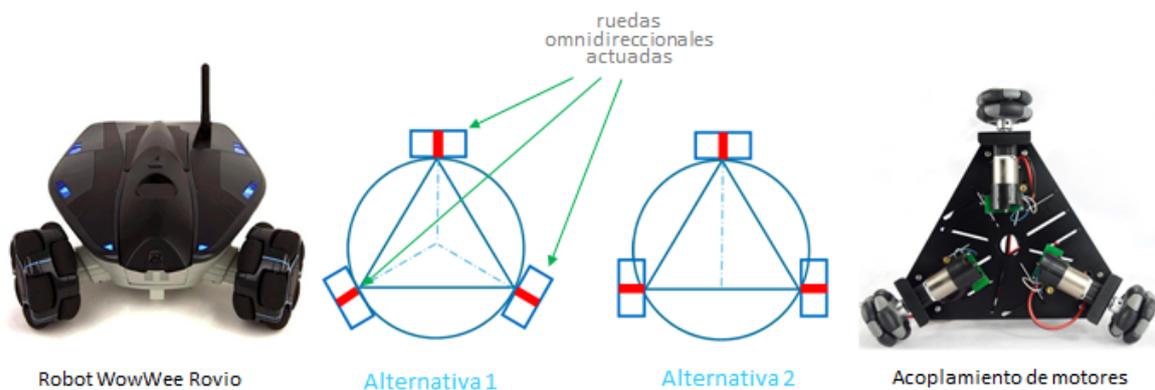
La ventaja más significativa del robot con accionamiento síncrono es que el movimiento omnidireccional se puede lograr utilizando solo dos actuadores si se emplea la configuración basada en correas y poleas. Dado que la estructura mecánica garantiza movimientos de dirección y accionamiento sincrónicos, se requiere menos esfuerzo de control para el control de movimiento obteniéndose una gran maniobrabilidad. Otras ventajas incluyen que la información de la odometría es relativamente precisa y las fuerzas motrices se distribuyen uniformemente entre todas las ruedas. Los inconvenientes de este enfoque se pueden resumir como:

- Estructura mecánica complicada, lo que representa un costo excesivo.
- Si existe holgura o un acoplamiento flojo en la transmisión de la cadena, pueden ocurrir diferencias de velocidad entre las ruedas.
- Para lograr un movimiento omnidireccional, las orientaciones de las ruedas deben estar alineadas con la dirección de velocidad deseada antes del movimiento, debido a las restricciones de velocidad no holonómicas.

Para este tipo de configuración se debe considerar que el uso de más de tres ruedas significaría una complejidad adicional y, por lo tanto, este diseño es mejor para robots con tres ruedas en una superficie uniforme.

### 2.4.3.4 Robot Omnidireccional con Ruedas Universales

Un robot omnidireccional con ruedas universales requiere al menos tres ruedas activas para ser considerado un vehículo omnidireccional holonómico. Una de las principales ventajas de utilizar ruedas universales es que se pueden construir fácilmente robots móviles omnidireccionales con lo que se logra máxima maniobrabilidad en el plano, esto significa que el robot puede moverse en cualquier dirección sin necesidad de reorientarse, en contraste, con los otros tipos de robots vistos hasta el momento que tienen una maniobrabilidad restringida.



**Figura 2.18** Ejemplo de un robot omnidireccional con tres ruedas universales.

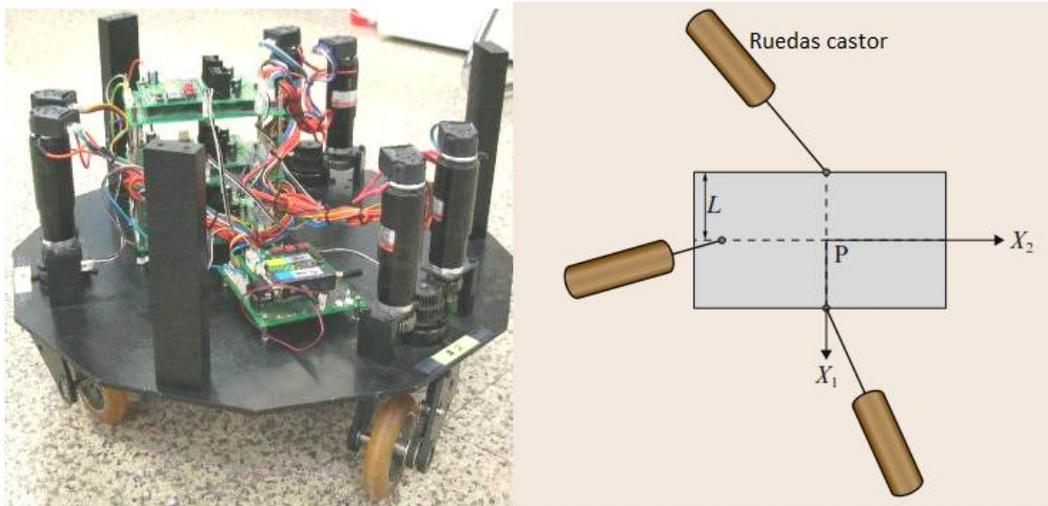
Dado que se pueden construir robots omnidireccionales sin utilizar módulos de ruedas de dirección activa, las estructuras mecánicas de las piezas de accionamiento pueden tener estructuras simples. Sin embargo, el diseño mecánico de una rueda se vuelve un poco complicado. Un inconveniente de la rueda universal es que hay una vibración vertical debido a los contactos discontinuos durante el movimiento; para resolver este problema, se han propuesto una variedad de diseños mecánicos. Otro inconveniente es su durabilidad relativamente baja en comparación con los neumáticos convencionales.

Desde la perspectiva del diseño, dado que las ruedas están espaciadas a  $120^\circ$ , solo una de las ruedas será 100% eficiente, en otras palabras, solo hay una rueda motriz y dos ruedas libres que lo hacen conducir a menor velocidad. Además, dado que ninguna de las ruedas está alineada en el mismo eje (alternativa 1 de la Figura 2.18), se requieren tres cálculos diferentes para cada una de las ruedas.

Otros diseñadores añaden dos ruedas paralelas entre sí y una rueda perpendicular a las dos ruedas (alternativa 2 de la Figura 2.18), que es un mejor diseño o un compromiso entre los robots omnidireccionales de tres ruedas y los de cuatro ruedas.

### 2.4.3.5 Robot Omnidireccional con Ruedas Castor

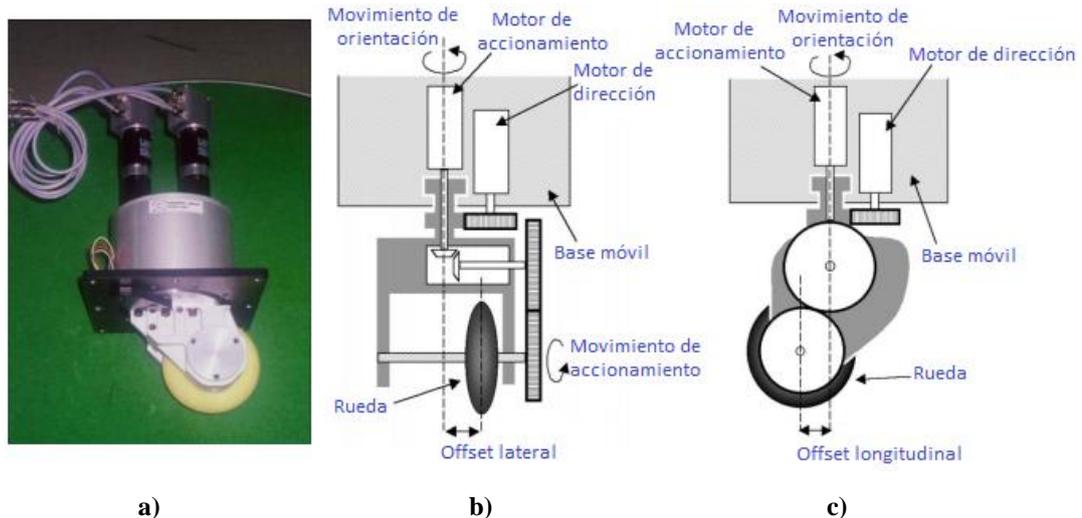
Un robot omnidireccional con ruedas castor puede ser construido utilizando al menos dos ruedas activas y otra rueda pasiva tipo castor. El robot puede ser controlado para generar velocidades lineales y angulares arbitrarias independientemente de las orientaciones de las ruedas. Dado que el robot utiliza llantas convencionales, se pueden solucionar las desventajas de las ruedas suecas, por ejemplo, vibraciones verticales o problemas de durabilidad.



**Figura 2.19** Ejemplo de un robot omnidireccional con tres ruedas activas tipo castor.

Las desventajas de este robot se pueden resumir de la siguiente manera:

- Dado que la ubicación del punto de contacto con el suelo (es decir, la huella) cambia con respecto al chasis del robot, puede producirse inestabilidad cuando la distancia entre las ruedas es demasiado corta.
- Si el robot cambia su movimiento a la dirección reversa, puede producirse un cambio brusco de orientación de las ruedas; a este comportamiento se le llama efecto de carrito de compras, que puede resultar en velocidades de dirección instantáneas altas.
- Si un motor de accionamiento está conectado directamente a la rueda, los cables del motor se enrollarán debido a los movimientos de la dirección. Para evitar esto, debe emplearse un tren de engranajes para transmitir la velocidad angular de entrada desde el motor de accionamiento, que está unido al chasis del robot. En este caso, la estructura mecánica se vuelve bastante complicada.

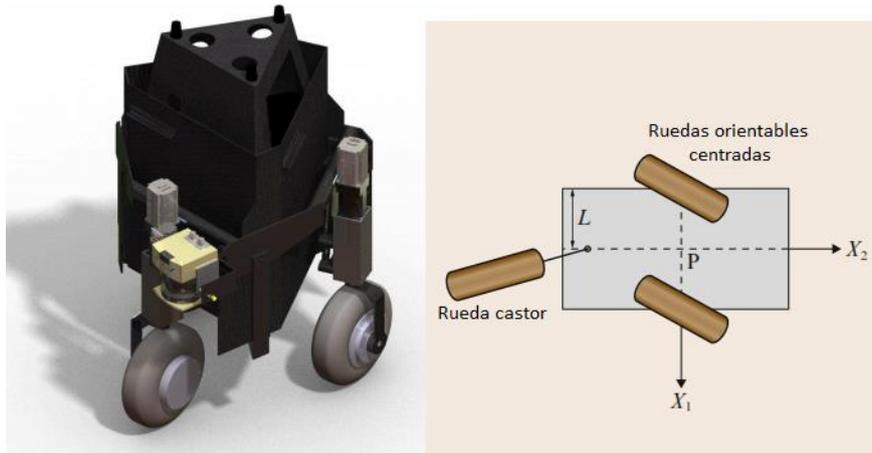


**Figura 2.20.** Módulo completo para el accionamiento y direccionamiento de una rueda castor: **a)** Rueda física, **b)** Vista frontal, **c)** Vista Lateral.

- Si un robot está equipado con más de dos módulos de ruedas activas castor, esto conlleva al empleo de más de cuatro actuadores. Dado que el número mínimo de actuadores para lograr un movimiento omnidireccional holonómico es tres, este es un sistema sobreactivado, por lo tanto, los actuadores deben controlarse con precisión de manera síncrona.

### 2.4.3.6 Robot Omnidireccional con Ruedas Orientables Centradas

Un robot omnidireccional con ruedas orientables centradas requiere al menos dos módulos de ruedas activas para su construcción, como se muestra en la Figura 2.21. Una diferencia significativa entre la rueda activa castor (descentrada) y la rueda orientable centrada es que la orientación de la rueda siempre debe estar alineada con la dirección deseada de la velocidad, calculada por cinemática inversa. Este hecho implica que este robot es no holonómico y omnidireccional. Los inconvenientes mecánicos son similares a los del uso de ruedas activas castor, es decir, muchos actuadores y estructuras mecánicas complicadas. Dado que el motor de accionamiento está conectado directamente al eje motriz en muchos casos, los ángulos de dirección permitidos son limitados para evitar problemas de cableado.



**Figura 2.21** Ejemplo de un robot omnidireccional con dos ruedas orientables centradas y una rueda tipo castor.

Existen otros diseños para robots de tres ruedas que el lector puede encontrar en documentación relacionada a robótica móvil con ruedas, además de los seis descritos en este apartado.

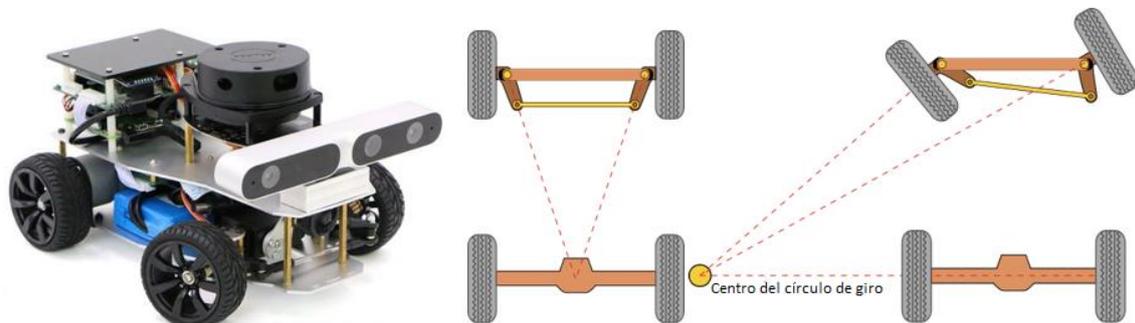
## 2.4.4 Robots con Cuatro Ruedas

Los diseños antes mencionados se pueden extender a robots de cuatro ruedas para mejorar la estabilidad y tracción al piso. Las ruedas adicionales pueden ser ruedas pasivas sin añadir restricciones cinemáticas adicionales. También se pueden agregar ruedas activas y deben controlarse resolviendo el problema de la cinemática inversa. Los robots de cuatro ruedas requieren suspensión para mantener el contacto con el suelo y evitar que las ruedas floten en superficies irregulares [1-7, 17].

### 2.4.4.1 Robot con Sistema Direccional Ackermann

Entre los diversos robots de cuatro ruedas, tenemos una estructura similar a un automóvil que se ha denominado sistema direccional Ackermann el cual se muestra en la Figura 2.22. Consiste en un grupo de dos ruedas motrices traseras y otro de dos ruedas directrices delanteras existiendo un único actuador para cada grupo de ruedas, es decir, que posee tracción y dirección combinada. El primero de los actuadores gobierna el avance del vehículo y el segundo dirige el volante que controla la dirección de movimiento. Este robot puede moverse en línea recta

porque las ruedas traseras son impulsadas por un eje común, pero no puede girar en el instante puesto que requiere un cierto radio mínimo. Además, las ruedas motrices traseras experimentan deslizamiento al moverse en curvas.



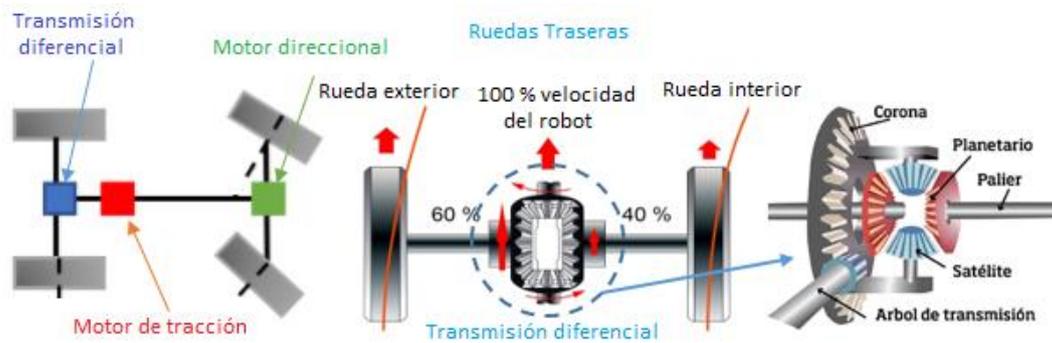
**Figura 2.22** Ejemplo de un robot con sistema de dirección Ackermann.

Las dos ruedas delanteras deben dirigirse sincrónicamente para mantener el mismo centro de rotación instantáneo. Está claro que las orientaciones de las dos ruedas delanteras son ligeramente diferentes porque las curvaturas de rotación son también levemente diferentes, como resultado, esta solución es cinemáticamente equivalente a una sola rueda orientable y su cinemática sería idéntica a la de un robot con configuración triciclo de tres ruedas accionado y dirigido por dos motores.

La principal ventaja del sistema Ackermann reside en la sencillez del control de dirección para seguir una trayectoria dada y que es estable durante el movimiento a alta velocidad. Sin embargo, al ser imposible el movimiento de giro instantáneo sobre el eje vertical, los robots necesitan maniobrar para alcanzar determinadas posiciones convirtiendo el mecanismo de dirección un poco complicado; esto es lo que ocurre en maniobras de aparcamiento. Por ello el estudio cinemático de robots con este sistema de locomoción es más complejo que el correspondiente a los robots con sistema motriz diferencial.

Cuando un robot tipo Ackermann gira, las ruedas describen una trayectoria curva, pero el espacio recorrido por las ruedas interiores y exteriores a la trayectoria es diferente, ya que las ruedas interiores a la curva recorren un espacio menor. Si las ruedas interiores y exteriores giran solidariamente unidas por un eje rígido, la única posibilidad para que ambas ruedas recorran espacios diferentes es que la rueda interior derrape deslizándose sobre la superficie para compensar la diferencia de espacios recorridos. Para evitar el derrape de la rueda interior, la unión de ambas ruedas en el eje motriz no debe ser rígida, sino a través de una transmisión

diferencial (sistema de engranajes), que tiene la propiedad de permitir que las ruedas conectadas a ambos lados de la transmisión giren a velocidades diferentes (ver Figura 2.23).

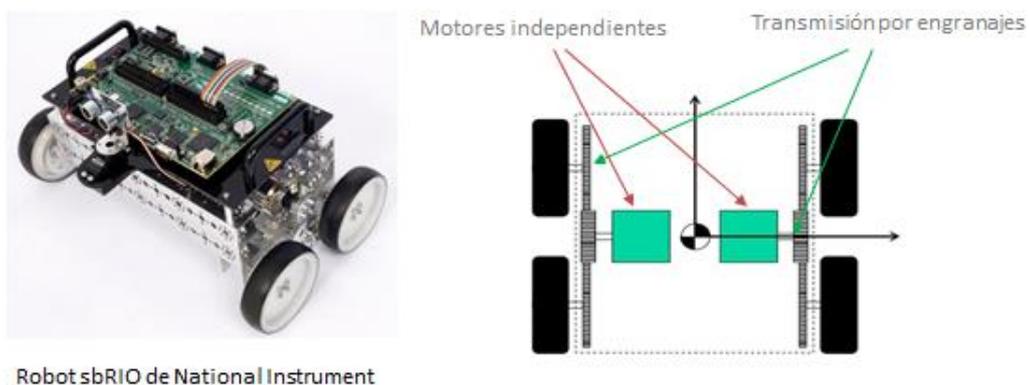


**Figura 2.23** Esquema del sistema de transmisión diferencial.

Si bien su cinemática, su diseño mecánico y su electrónica de control es un poco compleja, esta configuración presenta un gran interés para los amantes de los robots todo terreno en donde los principales desarrollos se originan en la captación de información sensorial y su posterior tratamiento para conseguir la reconstrucción de entornos o para el control en tiempo real.

#### 2.4.4.2 Robot con Accionamiento Diferencial

Existen ciertas configuraciones diferenciales que presentan un diseño como el mostrado en la Figura 2.24, al cual podemos denominarlo robot con accionamiento diferencial de cuatro ruedas, cuyo diseño permite mejorar el problema de estabilidad que aún se podría tener con una configuración de tres ruedas que utiliza una rueda libre.



**Figura 2.24** Ejemplo de un robot de accionamiento diferencial con 4 ruedas.

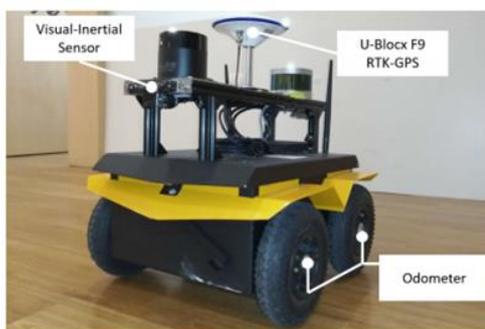
La configuración diferencial de este robot consta de un motor en cada extremo lateral del mismo y el eje de cada motor posee un arreglo de engranajes que permite la movilidad de las dos ruedas

convencionales fijas incorporadas en cada lado. El sistema de engranajes permite transformar los pequeños motores rápidos, pero poco potentes, en motores más lentos, pero con un mayor par, permitiendo así motorizar las ruedas y otros mecanismos. La distancia entre los ejes es pequeña, así que el robot solo puede escalar pequeños obstáculos, pero puede manejar fácilmente las superficies planas incluyendo la hierba y la grava.

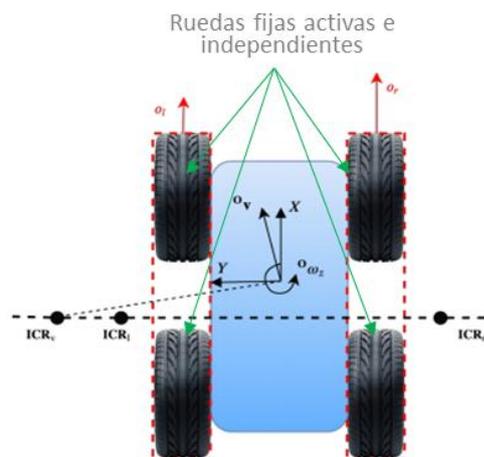
El sistema de tracción y dirección asociado a esta configuración diferencial le permite independizar las consignas de velocidad lineal y angular respectivamente. Las ventajas que se derivan de la estructura mecánica, la electrónica de control y su análisis cinemático hacen de esta configuración una de las preferidas para robots de laboratorio.

### 2.4.4.3 Robot con Dirección Deslizante

La locomoción con dirección deslizante se usa comúnmente en robots con orugas, pero también se usa en algunos robots de cuatro y seis ruedas convencionales fijas, cada una de ellas asociadas a un motor y distributivas equitativamente a ambos lados del robot. En estos robots, las ruedas de cada lado se pueden conducir a varias velocidades en avance y retroceso (todas las ruedas de un lado giran a la misma velocidad). No hay un mecanismo de dirección explícito, como su nombre lo indica, la dirección se logra accionando cada lado a una velocidad diferente o en una dirección diferente, lo que hace que las ruedas patinen en el suelo. El movimiento es el efecto de combinar las velocidades de las ruedas del lado izquierdo con las del lado derecho.



Robot Clearpath Jackal



**Figura 2.25** Ejemplo de un robot con dirección deslizante con 4 ruedas fijas convencionales (robot Clearpath Jackal).

En este tipo de configuración al tener múltiples motores para la marcha y dirección del robot, se mejora mucho la movilidad, aunque se dificulta el control simultáneo de los motores. Otra desventaja en esta configuración es el incremento del deslizamiento en las ruedas, lo que aumenta el desgaste de los neumáticos. En el entorno de trabajo, estas desventajas se compensan con la simplicidad del sistema de transmisión, sin embargo, en el “mundo de los robots” el derrape es una gran desventaja debido al efecto negativo que tiene en la odometría, puesto que las ruedas que patinan no siguen el movimiento exacto del robot. Dado que la odometría es un factor muy importante para la determinación de la posición, la dirección deslizante no se usa comúnmente en robots con detección escasa (sin cámaras de video o sonar) que requieren una determinación de posición precisa.

La dirección deslizante está estrechamente relacionada con el sistema de transmisión diferencial, reemplazando la rueda giratoria con ruedas motrices adicionales. Tiene la misma desventaja: moverse en línea recta requiere que las ruedas de cada lado giren a la misma velocidad, lo que puede ser difícil de lograr. La ventaja de la dirección deslizante es una mayor tracción y ningún efecto de rueda giratoria.

#### **2.4.4.4 Robots Omnidireccionales con Cuatro Ruedas**

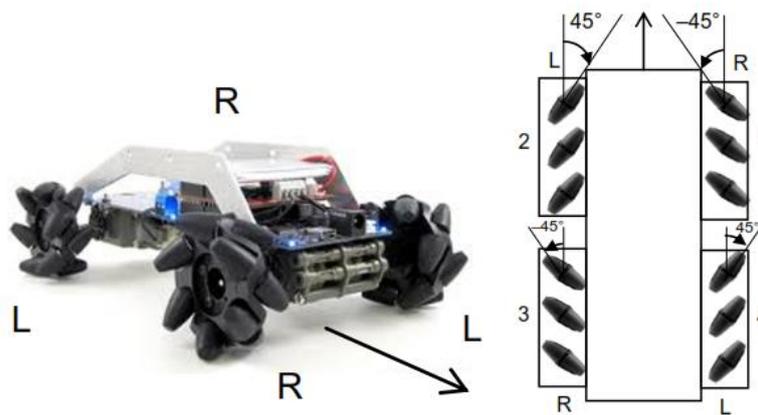
Los robots omnidireccionales con cuatro ruedas poseen mayor tracción que los de tres, debido a la potencia suministrada por el motor adicional. Esta característica conlleva a un menor deslizamiento en las ruedas siempre que el peso de la carga se encuentre distribuido uniformemente sobre ellas, pero en contraparte se produce un mayor consumo de energía, mayor costo y probablemente, se deba incorporar un sistema de suspensión con la finalidad de distribuir las fuerzas sobre las ruedas. Los robots móviles omnidireccionales permiten una mejor maniobrabilidad y eficiencia.

Los robots omnidireccionales de cuatro ruedas pueden estar compuestos por ruedas activas universales, mecanum (suecas), esféricas, orientables centradas u orientables descentradas (castor), conservando las mismas ventajas indicadas en los diferentes tipos de robots omnidireccionales con tres ruedas estudiados anteriormente.

El **robot omnidireccional con cuatro ruedas suecas**, también conocido como plataforma Mecanum es el diseño más popular y usado en la industria, aunque existen otras estructuras que

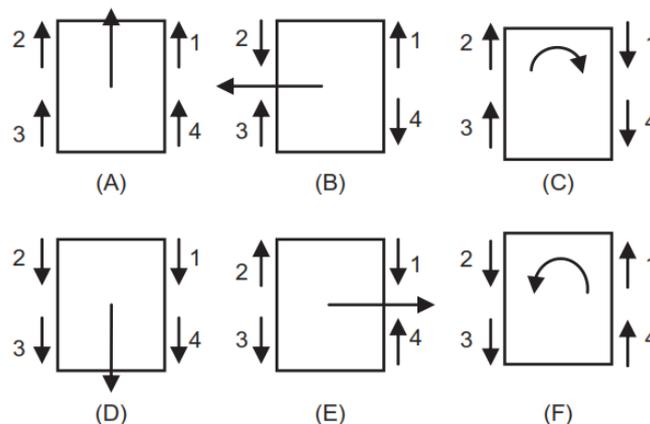
utilizan ruedas universales. Las cuatro ruedas del robot omnidireccional están distribuidas típicamente como se observa en la Figura 2.26.

En la plataforma Mecanum las ruedas diagonales son del mismo tipo, dos de ellas son llamadas ruedas zurdas (L) y las otras dos son conocidas como ruedas diestras (R). El ángulo de inclinación  $\gamma$  de los rodillos en las ruedas zurdas es de  $45^\circ$  y para las ruedas diestras  $\gamma = -45^\circ$ . Esta distribución permite que el vehículo se mueva en cualquier dirección con rotación arbitraria al colocar una velocidad adecuada a cada rueda principal.



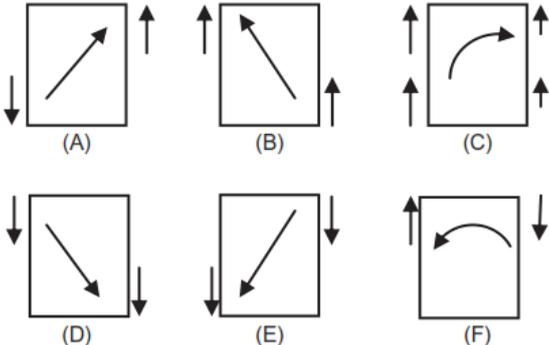
**Figura 2.26** Ejemplo de un robot omnidireccional con cuatro ruedas suecas [7].

En la Figura 2.27 se muestra en forma esquemática los seis movimientos básicos de este tipo de robot, etiquetados como: (A) hacia adelante, (B) deslizamiento a la izquierda, (C) giro en sentido horario, (D) retroceso, (E) deslizamiento a la derecha y (F) giro en sentido antihorario. Las flechas localizadas a la izquierda y a la derecha de la estructura determinan la dirección de movimiento de las ruedas para ese movimiento en particular del robot.



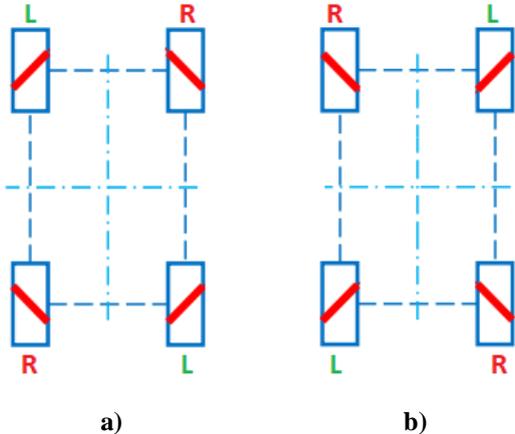
**Figura 2.27** Movimientos básicos de un robot móvil omnidireccional con cuatro ruedas suecas [7].

El movimiento hacia adelante o hacia atrás se obtiene colocando todas las ruedas principales a la misma velocidad y en la misma dirección. Si las velocidades de las ruedas principales de un lado son opuestas a las velocidades de las ruedas del otro lado, la plataforma girará. El movimiento lateral de la plataforma se obtiene si las ruedas de una diagonal tienen velocidad opuesta a las ruedas de la otra diagonal. Con la combinación de los movimientos descritos y variando la magnitud de velocidad de los motores, se puede lograr el movimiento de la plataforma en cualquier dirección y rotación en el plano. En la Figura 2.28 se muestran algunos ejemplos de locomoción en plano.



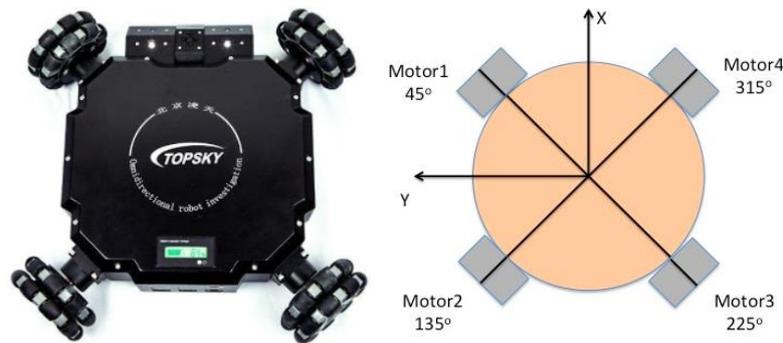
**Figura 2.28.** Ejemplos de locomociones: (A) diagonal adelante derecha, (B) diagonal adelante izquierda, (C) curva derecha, (D) diagonal atrás derecha, (E) diagonal atrás izquierda y (F) arco lateral [7].

Las ruedas zurdas L y diestras R pueden intercambiarse, es decir, ruedas delanteras RL y ruedas traseras LR, como se observa en la Figura 2.29. Nuevamente, con el movimiento adecuado de las ruedas, todos los modos de locomoción omnidireccional también se pueden obtener con esta configuración.



**Figura 2.29** Posibles distribuciones de las ruedas para un robot omnidireccional con cuatro ruedas suecas: **a)** Ruedas delanteras LR y traseras RL, **b)** Ruedas delanteras RL y traseras LR.

Otra configuración utilizada es la de un **robot omnidireccional con cuatro ruedas universales** como la mostrada en la Figura 2.30. Puede lograr los mismos movimientos que una plataforma Mecanum pero con diferentes criterios de activación y desactivación de los motores, así como la variación de la magnitud de velocidad de las ruedas. Los cuatro motores se distribuyen equidistantes entre sí  $90^\circ$  cada uno conectado a una rueda universal, esto significa que dos ruedas cualesquiera son paralelas entre sí y otras dos ruedas perpendiculares a cualquiera de ellas.



**Figura. 2.30** Ejemplo de un robot omnidireccional con cuatro ruedas universales.

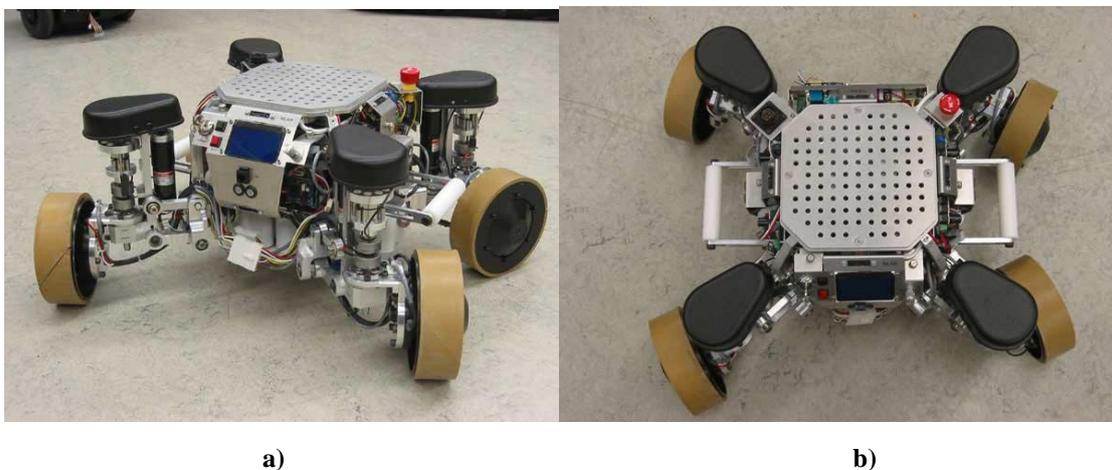
El primer y mayor beneficio es el cálculo simplificado, dado que hay dos pares de ruedas, cada par requiere solo un cálculo y el control de las cuatro ruedas requieren solo dos cálculos en total. También para realizar cualquier movimiento del robot siempre hay dos ruedas actuadas y dos ruedas libres, esto hace que las dos ruedas actuadas sean 100% eficientes y controlen el robot a mayor velocidad en comparación con el diseño de tres ruedas.

El único inconveniente que se ha encontrado es que un robot omnidireccional de cuatro ruedas universales no se equilibra en terrenos irregulares y tampoco se garantiza que las cuatro ruedas permanezcan en el mismo plano. La rueda adicional también puede representar un costo adicional, pero la ventaja hace que esto parezca una preocupación menor.

Por último y para finalizar se presentan dos ejemplos de robots omnidireccionales con cuatro ruedas orientables centradas y descentradas (castor), en los cuales cada una de sus ruedas se accionan y direccionan de forma independiente.

En la Figura 2.31 se presenta el robot Azimut 2 que es un **robot omnidireccional con cuatro ruedas castor** que es capaz de moverse hacia los lados sin cambiar su orientación, haciéndolo holonómico. El robot Azimut 2 está diseñado para ser altamente modular, colocando, por

ejemplo, los actuadores en las articulaciones para que las ruedas puedan ser fácilmente reemplazadas por articulaciones tipo patas para operaciones todo terreno. La estabilidad y el seguimiento de la trayectoria se mejoran agregando una suspensión vertical y utilizando actuadores elásticos para la dirección motorizada de las articulaciones. Se coloca un elemento elástico en el mecanismo de actuación y se utiliza un sensor para medir su deformación, lo que permite detectar y controlar el torque en el extremo del actuador. Estos componentes mejoran el movimiento del robot en terrenos irregulares, haciendo que el robot sienta la superficie sobre la que opera.



**Figura 2.31** Ejemplo de un robot omnidireccional con cuatro ruedas castor, Azimut 2: **a)** Vista frontal, **b)** Vista superior.

En la Figura 2.32 se presenta el robot Seekur de la compañía Adept MobileRobots, el cual puede ser clasificado como un **robot omnidireccional con cuatro ruedas orientables centradas**. Este robot puede ser conducido de forma completamente autónoma mediante software integrado o teleoperado por control remoto. Su estructura robusta de aluminio, suspensión de acero y su clasificación IP garantizan una protección eficaz contra la intemperie, por lo que este robot puede navegar en todas las condiciones, incluso en terrenos muy accidentados.



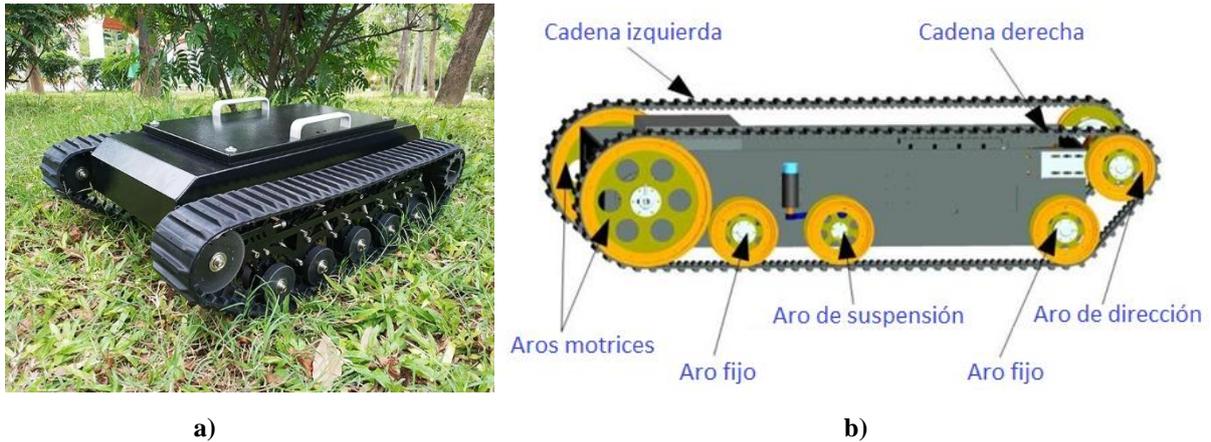
**Figura 2.32** Ejemplo de un robot omnidireccional con cuatro ruedas orientables centradas (robot Seekur de Adept MobileRobots).

## 2.5 Locomoción mediante Orugas

En terrenos irregulares, muy deslizantes o con grandes obstáculos, los robots basados en orugas son más convenientes que los basados en ruedas. Con las orugas se consigue una mayor fuerza de tracción en el terreno y reducen el deslizamiento, manteniendo la misma sencillez mecánica y de control que en los sistemas basados en ruedas [14-17].

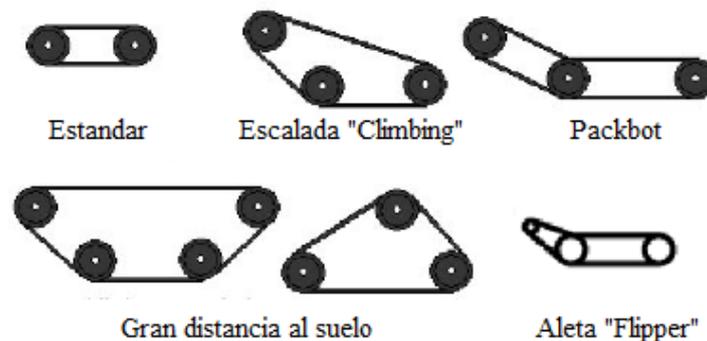
Los robots con orugas utilizan principalmente la transmisión de dirección deslizante, que es un concepto modificado de transmisión diferencial. Este tipo de robot tiene dos cadenas (correas o orugas) de tracción unidas a cada lado del chasis accionadas por dos motores separados y un conjunto de aros, lo que permite que puedan girar independientemente. Se dirigen moviendo las cadenas a diferentes velocidades en la misma dirección u opuesta.

Las cadenas pueden ser de goma si el vehículo es pequeño o de metal para vehículos grandes y pesados, además pueden tener crestas o ranuras sobre la superficie; esto le ayuda a mejorar el agarre sobre la tierra o arena. La mayoría de las veces, estos robots patinan para cambiar de dirección, esto hace que las cadenas se desgasten rápidamente y también requieran un área más grande para girar mientras deslizan todo su cuerpo contra el suelo.



**Figura 2.33** Ejemplo de un robot con tracción por orugas: **a)** Vista física, **b)** Componentes principales.

Si el robot debe girar a la derecha, la cadena de la izquierda debe correr más rápido que la cadena de la derecha. Si el robot va a girar a la izquierda, la cadena de la derecha debe correr más rápido que la cadena de la izquierda. El radio de dirección depende de la diferencia de velocidad entre las dos orugas. Hasta la fecha se han diseñado varios sistemas de locomoción con orugas (Figura 2.34) a nivel comercial e investigativo, atendiendo a los diferentes tipos de entornos y superficies por los cuales se desplazará el robot.



**Figura 2.34** Algunas formas básicas de los sistemas de locomoción con orugas.

Actualmente, se ha notado un creciente interés en el desarrollo y estudio de robots con orugas basados en los sistemas de brazo estabilizador de aletas (Figura 2.35), tal vez por su gran maniobrabilidad para subir gradas y escalar muchos obstáculos que son mucho más altos que el robot. Además, las estructuras mecánicas con cuatro brazos articulados pueden transformar al robot en varias configuraciones de navegación con la finalidad de superar diferentes desafíos del terreno.



**Figura 2.35** Ejemplos de robots móviles con orugas basados en sistemas de brazo estabilizador de aletas.

Las cadenas pueden cruzar fácilmente obstáculos más grandes debido a su mayor área de contacto con el suelo, así que los robots basados en orugas se pueden utilizar en casi cualquier terreno. Una ventaja especial de la transmisión por orugas es que las ruedas se pueden suspender individualmente ayudando a mantener la tracción sobre piedras y otras obstrucciones. También hace que sea menos probable que una roca de tamaño moderado vuelque al robot.

La principal desventaja de este sistema de locomoción es su reducida eficiencia energética ya que se pierde mucha energía por rozamiento. Un problema potencial con las transmisiones de orugas es que la oruga puede salirse de los aros; las posibilidades de que esto suceda se reducen con un diseño adecuado de aros y orugas. Otro problema es que los aros pueden resbalar dentro de la oruga, sin que la oruga lo siga, esto es especialmente probable cuando el robot está subiendo una pendiente pronunciada. El vehículo se quedará quieto o rodará hacia atrás a pesar de que sus aros estén girando hacia adelante; esto puede evitarse mediante el uso de aros con dientes que encajen en las muescas del interior de la cadena (se asemeja a una cinta transportadora accionada por engranajes).

Generalmente los robots equipados con orugas son más voluminosos que sus equivalentes con ruedas y los métodos de odometría para determinar su postura sobre el plano no son tan precisos, puesto que generan grandes errores debido al deslizamiento de las cadenas. Este tipo de locomoción suele emplearse en aplicaciones de intervención con terrenos accidentados o deslizantes y en zonas urbanas en presencia de barreras arquitectónicas.

## 2.6 Locomoción Híbrida Terrestre

Los sistemas híbridos de locomoción resumen las ventajas de las patas, ruedas y orugas (algunos casos hasta con hélices). Se trata de sistemas que intentan resolver situaciones especiales en las que se precisa flexibilidad de locomoción [2-3, 17].

Una dificultad fundamental del uso de ruedas es que solo se pueden usar en superficies planas. Para superar este problema, las ruedas suelen estar unidas a un mecanismo especial de eslabones. Cada rueda está equipada con actuadores independientes y un mecanismo de articulación permite al robot adaptarse a condiciones irregulares del terreno. En la Figura 2.36 se muestra un diseño típico de un robot con estas características y se puede entender como un robot híbrido es una combinación de un robot con patas y un robot con ruedas.



**Figura 2.36** Un robot móvil híbrido para terrenos accidentados formado por patas y ruedas (Shrimp III).

Otros ejemplos híbridos de robots equipados con orugas, ruedas y hélices son los mostrados en la Figura 2.37; las ruedas y las orugas tienen ventajas y desventajas complementarias. Los robots con ruedas son energéticamente eficientes; sin embargo, los robots con orugas pueden atravesar terrenos accidentados.

En general, un robot móvil híbrido terrestre puede elegir selectivamente su mecanismo de accionamiento de acuerdo con las condiciones ambientales, aunque el costo de fabricación aumenta.



a)

b)

**Figura 2.37** Ejemplos de robots móviles híbridos: **a)** Orugas y ruedas (CoMoRAT), **b)** Orugas y hélices (B-Unstoppable).

## Referencias

- [1] R. Siegwart, R.I. Nourbakhsh, and D. Scaramuzza. Introduction to Autonomous Mobile Robots. MIT Press, London, England, 2011.
- [2] B. Siciliano, and O. Khatib, eds. Springer Handbook of Robotics. Springer, Berlin, 2016.
- [3] B. Siciliano, and O. Khatib, eds. Springer Handbook of Robotics. Springer, Berlin, 2008.
- [4] IL. Bambino. Una Introducción a los Robots Móviles. 2008. website: [https://sistemamid.com/panel/uploads/biblioteca/2017-01-01\\_09-42-20138787.pdf](https://sistemamid.com/panel/uploads/biblioteca/2017-01-01_09-42-20138787.pdf)
- [5] J. Figueroa, A. Palaguachi. Diseño y Elaboración de Guías de Laboratorio para la Plataforma Móvil Labview Robotics SBRIO Starter Kit de National Instrument. Escuela Politécnica del Ejército, Quito, Ecuador, 2012.
- [6] G. Klančar, A. Zdešar, S. Blažic, and I. Škrjanc. Wheeled Mobile Robotics: From Fundamentals Towards Autonomous Systems. Butterworth-Heinemann Elsevier, Ljubljana, Slovenia, 2017.
- [7] SG. Tzafestas. Introduction to Mobile Robot Control. Elsevier, Athens, Greece, 2014.
- [8] G. Dudek, and M. Jenkin. Computational Principles of Mobile Robotics, Cambridge University Press, New York, 2010.
- [9] A. Ollero. Robótica: Manipuladores y Robots Móviles. Marcombo, Barcelona, España, 2009.
- [10] J. Salido. Cibernética Aplicada Robots Educativos. Alfaomega Grupo Editor, México, 2010.

- [11] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo. Robotics: Modelling, Planning and Control. Springer, London, 2010.
- [12] A. Kelly. Mobile Robotics: Mathematics, Models, and Methods. Cambridge University Press, New York, USA, 2013.
- [13] A. Vázquez, F. Ramos, R. Fernández, I. Payo and A. Adán. Robótica Educativa. RA-MA, Madrid, España, 2015.
- [14] Appin Knowledge Solutions. ROBOTICS. Infinity Science Press, Austin, Texas ,2007.
- [15] Robotpark. (2013). TRACK-DRIVE LOCOMOTION. website:  
<http://www.robotpark.com/academy/track-drive-locomotion-21139/>
- [16] Robotpark. (2021). TRACKED Robots. website:  
<http://www.robotpark.com/academy/all-types-of-robots/wheeled-robots/tracked-robots/>
- [17] Robot Plataform. (2021). Classification of robots. website:  
[http://www.robotplatform.com/knowledge/Classification\\_of\\_Robots/Classification\\_of\\_Robots.html](http://www.robotplatform.com/knowledge/Classification_of_Robots/Classification_of_Robots.html)

## Capítulo 3

# Modelamiento Cinemático y Dinámico

### 3.1 Introducción

Una vez revisadas las características de funcionamiento de los robots móviles con ruedas más populares en el mercado tecnológico, ha llegado el momento de estudiar los fundamentos matemáticos que permiten determinar el modelado del movimiento de algunos de estos robots, en donde el modelo resultante puede ser utilizado para varios propósitos. En este capítulo dicho modelado matemático, se utilizará principalmente para diseñar estrategias de locomoción del sistema móvil, es decir, estrategias para mover al robot móvil con ruedas de un lugar a otro.

Los modelos de movimiento pueden describir la cinemática y dinámica del robot. Cuando consideramos el modelo cinemático estamos interesados en las matemáticas del movimiento del robot sin considerar las causas que lo originan, como fuerzas o torques. El modelo cinemático describe la configuración de los robots en su espacio de trabajo, las relaciones entre sus parámetros geométricos y las restricciones impuestas en sus trayectorias. Un modelo cinemático describe las velocidades del sistema y se presenta mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que dependen de la estructura geométrica del robot [4]. El estudio de la cinemática es un requisito previo fundamental para el estudio de la dinámica y las características de estabilidad, así como para el control del robot móvil [5].

Los modelos dinámicos en cambio describen el movimiento de un sistema cuando se consideran las fuerzas que se aplican al mismo. Estos modelos incluyen la física del movimiento donde se utilizan las fuerzas, energías, masas, inercia y parámetros de velocidad. Las descripciones de modelos dinámicos están dadas por ecuaciones diferenciales de segundo orden [4].

En robótica móvil con ruedas, los modelos cinemáticos suelen ser suficientes para diseñar estrategias de locomoción, mientras que, para los otros sistemas como robots espaciales, aéreos o caminantes, también es necesario el modelado dinámico. Es importante comprender el comportamiento mecánico del robot tanto para diseñar robots móviles apropiados para las tareas como para comprender cómo crear algoritmos y programas de control para una estructura específica [2].

El proceso de comprender los movimientos de un robot comienza con el proceso de describir la contribución que las ruedas proporcionan al movimiento, donde cada rueda tiene la función de permitir que todo el robot se mueva. Del mismo modo, cada rueda también impone restricciones al movimiento del robot; por ejemplo, negarse a patinar lateralmente [2].

El objetivo de este capítulo es obtener los modelos matemáticos de varias configuraciones de robots móviles con ruedas partiendo del análisis cinemático y dinámico de las restricciones de movimientos y elementos que los componen, en particular, el capítulo

- Analiza el movimiento del robot móvil con ruedas en un sistema de referencia global y en su propio sistema de referencia local, además explica en qué consiste la cinemática directa e inversa;
- Describe formalmente las restricciones cinemáticas de las ruedas individuales y luego combina estas restricciones cinemáticas para expresar mediante ecuaciones matriciales generales las restricciones cinemáticas de todo el robot móvil;
- Introduce los conceptos de grado de movilidad, grado de maniobrabilidad y maniobrabilidad del robot móvil, así como el concepto de espacio de trabajo y restricciones de movimiento;
- Analiza y obtiene las ecuaciones dinámicas matriciales del movimiento de los robots móviles con ruedas empleando para ello el método de Euler-Lagrange;
- Determina modelos cinemáticos y dinámicos para algunas configuraciones de robots móviles con ruedas, describiendo cómo el robot se mueve en función de su geometría y el comportamiento individual de cada rueda;

Con estas herramientas, se pueden evaluar las rutas y trayectorias que definen la maniobrabilidad del robot.

### **3.2 Cinemática de los Robots Móviles**

En general, la cinemática es la rama de la mecánica que investiga el movimiento de los cuerpos materiales sin referirse a sus masas/momentos de inercia y las fuerzas/torques que producen el movimiento. En robótica móvil la cinemática estudia la evolución de la postura, velocidad y aceleración, sin considerar las fuerzas o los torques. Claramente, las ecuaciones cinemáticas dependen de la geometría fija del robot con respecto a un sistema de referencia global fijo.

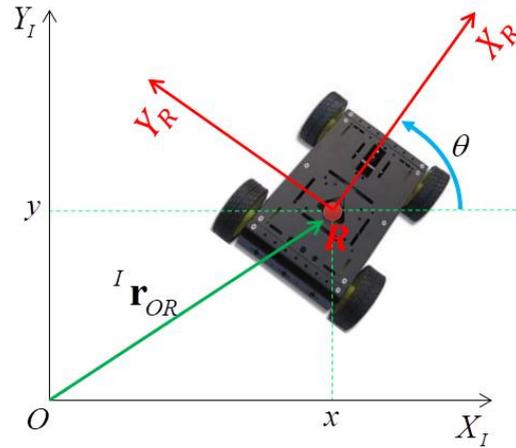
Derivar un modelo cinemático para el movimiento de todo el robot móvil es un proceso que parte de lo particular a lo general, donde cada rueda individual contribuye al movimiento total del chasis y al mismo tiempo impone restricciones al movimiento del robot. Las ruedas se unen en función de la geometría del chasis del robot y, por lo tanto, sus restricciones se combinan para formar las restricciones sobre el movimiento general del chasis del robot. Pero las fuerzas y las restricciones de cada rueda deben expresarse con respecto a un sistema de referencia claro y coherente. Esto es particularmente importante en robótica móvil debido a su naturaleza autónoma y móvil; puesto que se requiere un mapeo claro entre los sistemas de referencias globales y locales. Comenzamos por definir estos sistemas de referencia formalmente, luego usamos el formalismo resultante para determinar la cinemática de las ruedas individuales que posteriormente permitirán obtener la cinemática completa de los robots móviles [1].

### 3.2.1 Representación de la Posición y Orientación

Al modelar un robot móvil con ruedas, se busca establecer la relación del movimiento de su chasis y sus ruedas con un sistema de referencia global, de manera que se pueda establecer la postura (posición y orientación) del robot en el plano.

A lo largo de este análisis se modela al robot móvil como un cuerpo rígido sobre ruedas, que opera en un plano horizontal. La dimensionalidad total del chasis de robot en el plano es de tres, dos para la posición en el plano  $(x, y)$  y uno para la orientación  $(\theta)$  a lo largo del eje vertical (alrededor de  $z$ ) que es ortogonal al plano. Por supuesto, hay grados de libertad adicionales y flexibilidad debido a los ejes de las ruedas, las articulaciones de las ruedas orientables centradas y las articulaciones de las ruedas descentradas. Sin embargo, por chasis del robot nos referimos únicamente al cuerpo rígido del robot, ignorando las articulaciones y los grados de libertad internos del robot y sus ruedas [1, 24]. Para especificar la postura o pose del robot en el plano, establecemos una relación entre el sistema de referencia global (inercial, absoluto o fijo) del plano  $\{I\}$  y el sistema de referencia local del robot  $\{R\}$ , como se muestra en la Figura 3.1.

Los ejes  $X_I$  y  $Y_I$  definen una base inercial arbitraria en el plano que conforman el sistema de referencia global. Para especificar la posición del robot, se elige un punto  $R$  (centro de masa) sobre el chasis del robot como punto de referencia de posición, el cual corresponderá al origen del sistema de referencia local del robot formado por los ejes móviles  $X_R$  y  $Y_R$ .



**Figura 3.1.** Representación de la postura del robot respecto al sistema de referencia global y el sistema de referencia local del robot.

La posición de  $R$  en el sistema de referencia global se especifica mediante las coordenadas  $x$  e  $y$ , y la diferencia angular (ángulo de orientación) entre los sistemas de referencia global y local está dada por  $\theta$ . Se puede describir la postura del robot como un vector con estos tres elementos representado en (3.1), teniendo en cuenta que el uso del superíndice  $I$  es para aclarar que la postura del robot es respecto al sistema de referencia global.

$${}^I \xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Para describir el movimiento global del robot en términos de las componentes de movimiento local, será necesario mapear el movimiento a lo largo de los ejes del sistema de referencia global con el movimiento a lo largo de los ejes del sistema de referencia local. Por supuesto, el mapeo es una función de la postura actual del robot y se logra utilizando la *matriz de rotación ortogonal* alrededor del eje  $z$  dada por:

$${}^R R_I(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Esta matriz se puede utilizar para mapear el movimiento del robot en el sistema de referencia global  $\{X_I, Y_I\}$  al movimiento en términos del sistema de referencia local  $\{X_R, Y_R\}$ , esta operación se denota por:

$${}^R\dot{\xi} = {}^R\mathbf{R}_I \quad {}^I\dot{\xi} \quad (3.3)$$

De la ecuación anterior, también podemos calcular el movimiento del robot en el sistema de referencia global a partir del movimiento en su sistema de referencia local mediante:

$${}^I\dot{\xi} = {}^I\mathbf{R}_R \quad {}^R\dot{\xi} = ({}^R\mathbf{R}_I)^{-1} \quad {}^R\dot{\xi} \quad (3.4)$$

En donde, la estrategia será calcular primero la contribución de cada una de las ruedas del robot en el sistema de referencia local,  ${}^R\dot{\xi}$ , sin embargo, primero se debe calcular la matriz de rotación  ${}^I\mathbf{R}_R$ . En general, calcular la inversa de una matriz puede resultar complicado, sin embargo, en este caso es fácil porque es simplemente una transformación de  ${}^R\dot{\xi}$  a  ${}^I\dot{\xi}$  en donde se puede aplicar las propiedades de la matriz de rotación  ${}^I\mathbf{R}_R = ({}^R\mathbf{R}_I)^{-1} = ({}^R\mathbf{R}_I)^T$ :

$${}^I\mathbf{R}_R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

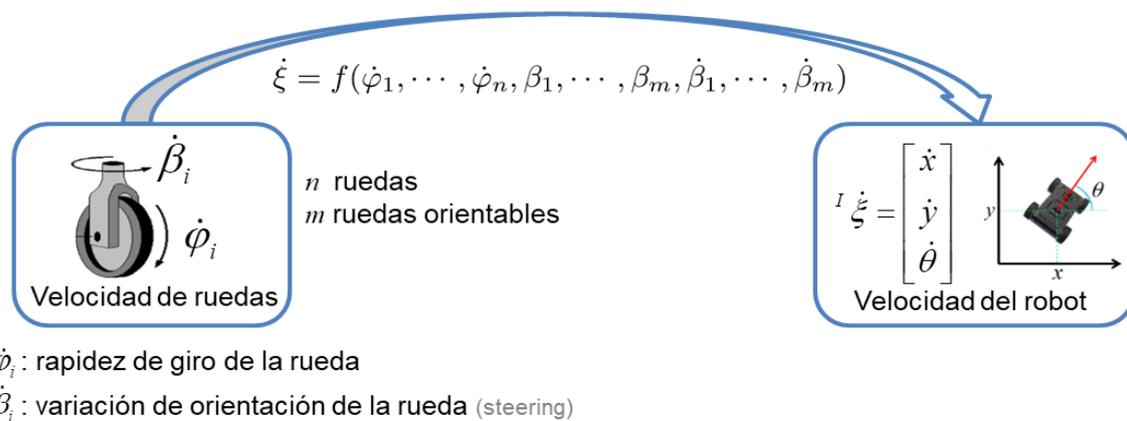
Este enfoque del modelado cinemático puede proporcionar información sobre el movimiento de un robot determinando el espacio de los posibles movimientos para cada diseño de chasis de robot. Para hacer esto, debemos ir más allá, describiendo formalmente las restricciones al movimiento del robot impuestas por cada rueda. La sección 3.2.3 comienza este proceso describiendo las restricciones para varios tipos de ruedas; el resto de este capítulo proporciona herramientas para analizar las características y el espacio de trabajo de un robot dadas estas restricciones.

### 3.2.2 Cinemática Directa e Inversa del Robot

Como ya se ha mencionado la cinemática relaciona el movimiento de las ruedas (los motores) con el movimiento del robot en el espacio cartesiano. En robótica móvil con ruedas se usa cinemática diferencial en donde se relaciona las velocidades y no las posiciones/orientaciones, puesto que las ruedas imponen restricciones a la velocidad del robot y muchas de estas restricciones de velocidad no son integrables (restricciones no holonómicas). En general, no se puede obtener relaciones de posición puesto que la velocidad no es integrable. Los tipos de

análisis cinemáticos que se deben resolver para un robot móvil se los puede clasificar en directo e inverso.

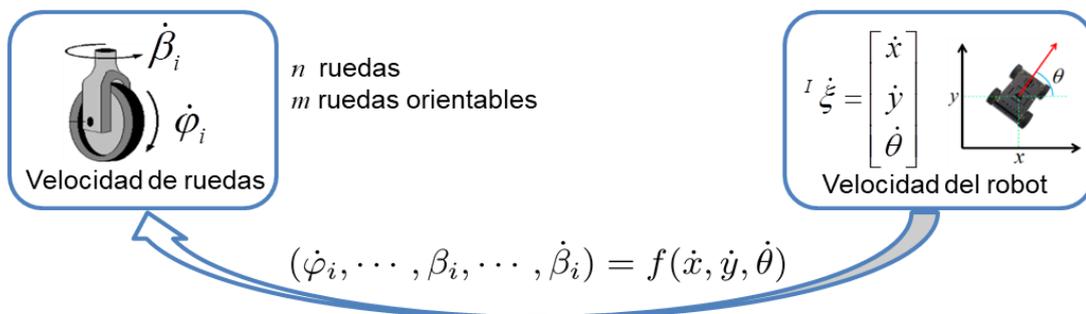
**Cinemática diferencial directa:** dadas las características de las ruedas (radio, ubicación geométrica en el robot, distancia entre cada una, entre otros), un punto de referencia del robot (normalmente el centro geométrico) y las velocidades a las que giran las ruedas, se pueden obtener las velocidades del robot respecto al sistema de referencia global, es decir, permite determinar la velocidad cartesiana del robot  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$  dadas las velocidades de giro de las ruedas  $(\dot{\phi}_i, \dot{\beta}_i)$  y las orientaciones de las ruedas  $\beta_i$ , como se ilustra en la Figura 3.2. A partir de esta información se puede definir la posición del robot en el plano global.



**Figura 3.2.** Representación de la cinemática diferencial directa.

**Cinemática diferencial inversa:** permite determinar las velocidades  $(\dot{\phi}_i, \dot{\beta}_i)$  y las orientaciones  $\beta_i$  que se deben aplicar a las ruedas, para que el robot se mueva con una velocidad cartesiana deseada  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ , como se ilustra en la Figura 3.3.

$\dot{\phi}_i$ : velocidad de giro de la rueda  
 $\dot{\beta}_i$ : variación de orientación de la rueda (steering)



**Figura 3.3.** Representación de la cinemática diferencial inversa.

La cinemática relaciona la velocidad de giro y la variación de la orientación de las ruedas con la velocidad cartesiana del robot. Esta relación queda determinada por las restricciones que imponen las ruedas al movimiento del robot. Cada rueda impone restricciones (0, 1 o 2) a la velocidad del robot y cada restricción depende del tipo de rueda, así como de la posición y orientación de la rueda en el chasis. Para un análisis cinemático completo es fundamental analizar las restricciones impuestas por cada tipo de rueda como se explica en la siguiente sección.

### 3.2.3 Restricciones Cinemáticas de las Ruedas

El primer paso para determinar el modelo cinemático del robot es expresar las restricciones sobre los movimientos de las ruedas individuales, los cuales se pueden combinar posteriormente para calcular el movimiento del robot como un todo. Como se discutió en el Capítulo 2, hay cinco tipos básicos de ruedas con propiedades cinemáticas muy variables. Por lo tanto, comenzamos presentando los conjuntos de restricciones específicas para cada tipo de rueda.

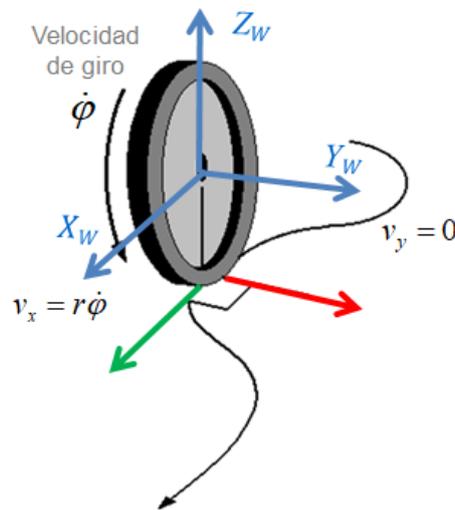
Sin embargo, varios supuestos importantes simplificarán esta presentación si se considera a la rueda ideal y se la analiza como una estructura rígida (indeformable). Supondremos que el plano de la rueda siempre permanece vertical y que la rueda gira alrededor de su eje horizontal, cuya orientación con respecto al robot puede ser fija o variable; en todos los casos existe un único punto de contacto entre la rueda y el plano del suelo. Además, asumimos que no hay deslizamiento en este único punto de contacto, es decir, la rueda experimenta movimiento solo en condiciones de rodamiento puro y rotación alrededor del eje vertical a través del punto de contacto [1].

Bajo estos supuestos, se presentan dos restricciones para cada tipo de rueda (Figura 3.4). La primera restricción refuerza el concepto de contacto rodante (*restricción de rodadura*) en donde la rueda debe rodar cuando el movimiento tiene lugar en la dirección apropiada lo que implica que la velocidad lineal del centro de la rueda  $v_x$  es proporcional a la velocidad de rotación  $\dot{\phi}$  de la rueda ( $v_x = r \dot{\phi}$ ). La segunda restricción refuerza el concepto de no deslizamiento lateral (*restricción de deslizamiento*) en donde la rueda no debe deslizarse ortogonalmente al plano que la contiene. Para cada rueda, las restricciones cinemáticas dan como resultado dos condiciones independientes. La velocidad lineal de la rueda respecto a su sistema de referencia

$\{W\}$  y tomando en consideración ambas restricciones queda expresada de forma matricial como:

$${}^w \dot{\xi} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

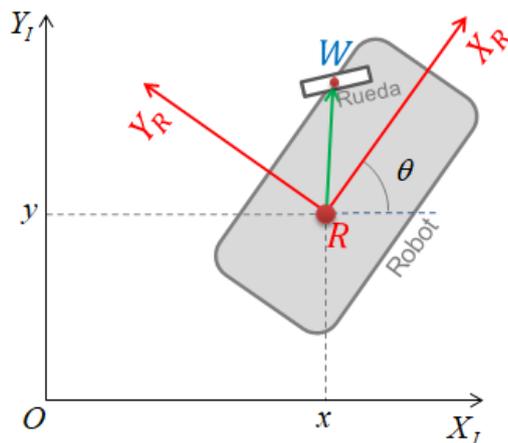
Para una rueda especial (por ejemplo, una rueda sueca), debido a la rotación relativa de los rodillos con respecto a la rueda, solo uno de los componentes de la velocidad del punto de contacto de la rueda es cero. La dirección de este componente cero es fija con respecto al plano de la rueda y depende de la construcción de la rueda. Para tales ruedas, las restricciones cinemáticas dan como resultado una sola condición [2].



**Figura 3.4.** Representación de las restricciones de una rueda convencional.

Para determinar el modelo cinemático de cada rueda se va a emplear de forma general la nomenclatura de los sistemas de referencias mostrados en la Figura 3.5: sistema inercial o global  $\{I\}$ , sistema del robot  $\{R\}$  y el sistema de la rueda  $\{W\}$ .

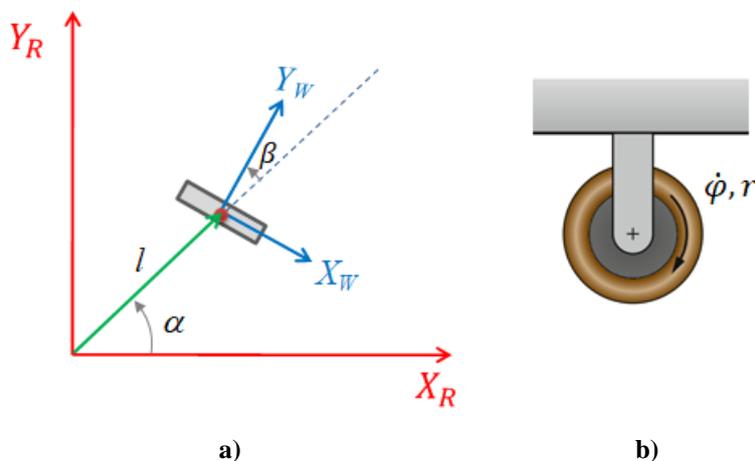
El objetivo es determinar cómo restringe la rueda el movimiento (velocidad) libre del robot especificando inicialmente la postura de la rueda respecto al sistema de referencia del robot  $\{R\}$ , para lo cual se debe encontrar los componentes de velocidad en las direcciones de las dos restricciones de la rueda (de rodadura y de deslizamiento).



**Figura 3.5.** Representación de los sistemas de referencia del robot incluyendo la rueda.

### 3.2.3.1 Rueda Convencional Fija

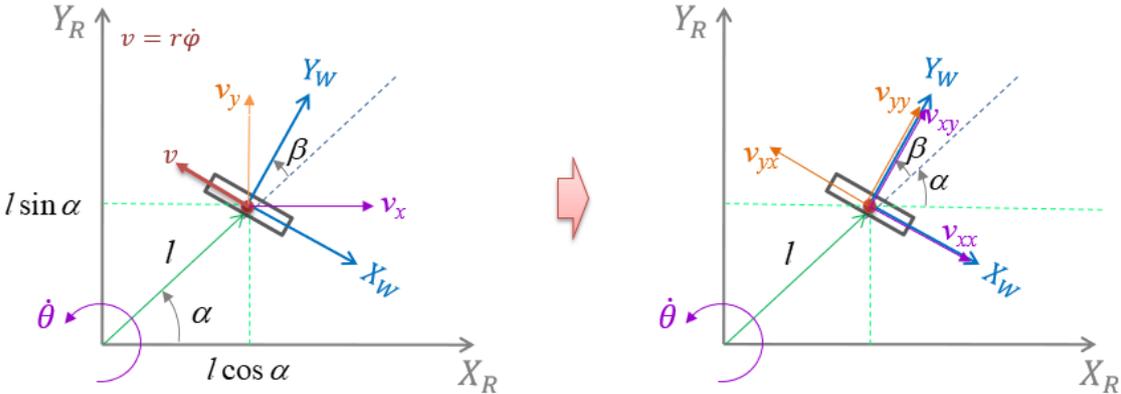
La rueda convencional o estándar fija no tiene eje de rotación vertical para la dirección. Su ángulo  $\beta$  con el chasis es fijo y está limitado al movimiento hacia adelante y hacia atrás a lo largo del plano de la rueda y la rotación alrededor de su punto de contacto con el plano del suelo. La Figura 3.6 muestra una rueda convencional fija e indica su postura (posición y orientación) en relación con el sistema de referencia local del robot  $\{X_R, Y_R\}$ . La posición de la rueda es expresada en coordenadas polares mediante la distancia  $l$  y el ángulo  $\alpha$ . El ángulo del plano de la rueda con respecto al chasis se indica mediante  $\beta$ , que es fijo, ya que este tipo de rueda no es orientable. La rueda, que tiene radio  $r$ , puede girar con el tiempo, por lo que su posición de rotación alrededor de su eje horizontal es una función del tiempo  $\varphi(t)$ .



**Figura 3.6.** Parámetros de una rueda convencional fija: a) Representación en plano, b) Vista lateral.

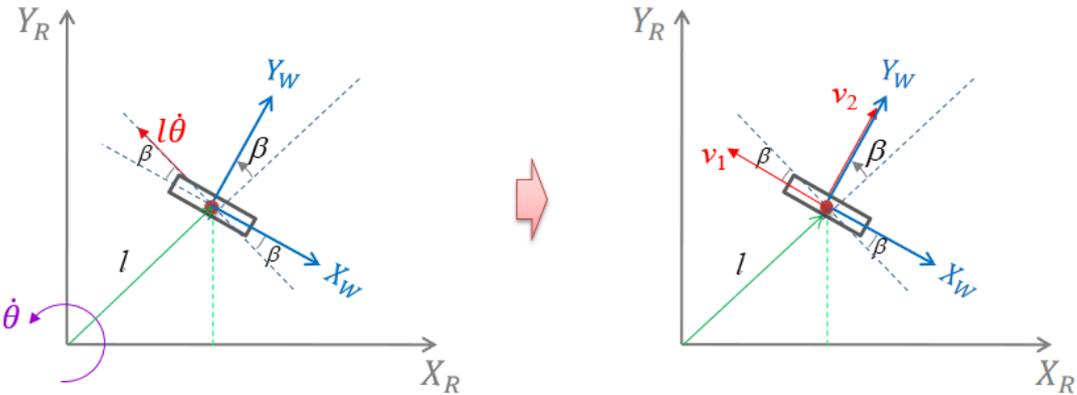
La restricción de rodadura de esta rueda obliga a que todo movimiento a lo largo de la dirección del plano de la rueda debe ir acompañado de la cantidad adecuada de giro de la rueda para que haya rodadura pura en el punto de contacto. Con esta descripción, los componentes de la velocidad del punto de contacto se calculan fácilmente. En primer lugar, se asignan las componentes de las velocidades lineales del robot ( $v_x$  y  $v_y$ ) en el punto de contacto de la rueda para determinar su contribución, también se asigna la velocidad rotacional  $\dot{\theta}$  del robot como se muestra en la Figura 3.7. Las componentes de la velocidad lineal del robot en la dirección del movimiento de la rueda y de su perpendicular están dadas por:

$$\begin{aligned}
 v_{xx} &= v_x \sin(\alpha + \beta) & v_{yx} &= v_y \cos(\alpha + \beta) \\
 v_{xy} &= v_x \cos(\alpha + \beta) & v_{yy} &= v_y \sin(\alpha + \beta)
 \end{aligned}$$



**Figura 3.7.** Asignación de las componentes de la velocidad lineal del robot.

El efecto vectorial de la velocidad angular  $\dot{\theta}$  del robot sobre el movimiento de la rueda se muestra en la Figura 3.8.



**Figura 3.8.** Asignación de las componentes de velocidad producidas por el efecto de la velocidad angular del robot.

Las componentes de la velocidad angular del robot en la dirección del movimiento de la rueda y de su perpendicular están dadas por:

$$v_1 = l\dot{\theta} \cos(\beta) \quad v_2 = l\dot{\theta} \sin(\beta)$$

**Restricción de rodadura:** la rueda solo avanza en el eje  $X_W$  en donde la velocidad de la rueda es  $r\dot{\phi}$  y resulta de la suma algebraica de todas las componentes de velocidad que actúan sobre ese eje.

$$v_{xx} - v_{yx} - v_1 = v$$

$$v_x \sin(\alpha + \beta) - v_y \cos(\alpha + \beta) - l\dot{\theta} \cos(\beta) = r\dot{\phi}$$

$$[\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)] \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = r\dot{\phi}$$

$$[\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)] {}^R \dot{\xi} = r\dot{\phi}$$

El primer término de la suma denota el movimiento total a lo largo del plano de la rueda. Los tres elementos del vector  ${}^R \dot{\xi}$  contienen información de la velocidad lineal y angular del robot, así como sus contribuciones para el movimiento a lo largo del plano de la rueda. Este movimiento a lo largo del plano de la rueda debe ser igual a  $r\dot{\phi}$  y de acuerdo con esta restricción este es el movimiento logrado al hacer girar la rueda.

**Restricción de deslizamiento:** en el eje  $Y_W$  la velocidad de la rueda es cero, es decir, que en este eje no hay movimiento y resulta de la suma algebraica de todas las componentes de velocidad que actúan sobre ese eje.

$$v_{xy} + v_{yy} + v_2 = 0$$

$$v_x \cos(\alpha + \beta) + v_y \sin(\alpha + \beta) + l\dot{\theta} \sin(\beta) = 0$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)] \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)] {}^R \dot{\xi} = 0$$

En resumen, se ha obtenido dos ecuaciones que se pueden expresar en función de las componentes del sistemas local o global y que contienen las dos restricciones impuestas en la rueda y están dadas por:

**Restricción de rodadura** (en el plano de la rueda):

$$\begin{aligned} [\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)]^R \dot{\xi} &= r\dot{\phi} \\ [\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)]^R \mathbf{R}_I \quad {}^I \dot{\xi} &= r\dot{\phi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Restricción de deslizamiento** (perpendicular al plano de la rueda):

$$\begin{aligned} [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)]^R \dot{\xi} &= 0 \\ [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)]^R \mathbf{R}_I \quad {}^I \dot{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Tenga en cuenta que el término  ${}^R \mathbf{R}_I \quad {}^I \dot{\xi}$  se utiliza para transformar los parámetros de movimiento  ${}^I \dot{\xi}$  que están en el sistema de referencia global  $\{X_I, Y_I\}$  en parámetros de movimiento en el sistema de referencia local  $\{X_R, Y_R\}$  del robot. Esto es necesario porque todos los demás parámetros de las dos ecuaciones ( $\alpha, \beta, l$ ), están en términos del sistema de referencia local del robot.

Cuando las ruedas convencionales son activas se debe especificar las dos restricciones (rodadura y deslizamiento). Para el caso de las ruedas pasivas el eje de apoyo puede ser fijo o bien oscilante, en el primer caso solo se considera la restricción de deslizamiento y en el segundo caso no se debe tomar en cuenta ninguna de las dos restricciones debido a que la velocidad de movimiento es una variable incontrolable (no accesible, ni para sensorizar ni para actuar).

Una forma alternativa de representar las dos restricciones cinemáticas de la rueda convencional fija en una expresión matricial más compacta y en donde todos los elementos de las ecuaciones (3.6) y (3.7) pueden agruparse es empleando la forma de restricción Pfaffian, la cual se formula a partir de  $\mathbf{a}^T(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$ :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin(\beta) & 0 \\ \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos(\beta) & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R \dot{\xi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

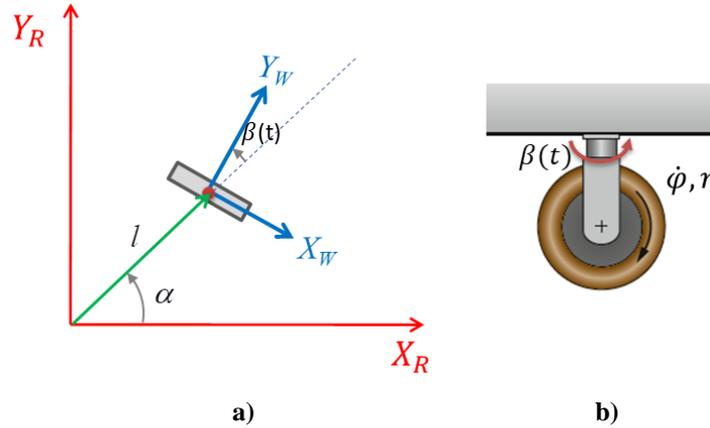
donde

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin(\beta) & 0 \\ \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos(\beta) & -r \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} {}^R \dot{\xi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Este tipo de representación es estudiada y analizada con mayor detalle en la sección 3.5.

### 3.2.3.2 Rueda Convencional Orientable Centrada o Direccional

La rueda convencional orientable centrada se diferencia de la rueda convencional fija solo en que hay un grado de libertad adicional: la rueda puede girar alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de la rueda y el punto de contacto con el suelo, como se muestra en la Figura 3.9.



**Figura 3.9.** Parámetros de una rueda convencional orientable centrada o rueda direccional: **a)** Representación en plano, **b)** Vista lateral.

Las ecuaciones de posición para la rueda convencional orientable centrada son idénticas a las de la rueda convencional fija que se muestra en la Figura 3.6 con una excepción, que la orientación de la rueda al chasis del robot ya no es un valor fijo único, sino que varía en función del tiempo  $\beta(t)$ . La posición de la rueda queda caracterizada por tres constantes ( $\alpha$ ,  $r$ ,  $l$ ) y su movimiento con respecto al chasis del robot por dos ángulos variables en el tiempo  $\beta(t)$  y  $\varphi(t)$ . Las restricciones de rodadura y deslizamiento son:

**Restricción de rodadura** (en el plano de la rueda):

$$\begin{aligned} [\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)]^R \dot{\xi} &= r \dot{\varphi} \\ [\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)]^R \mathbf{R}_I \quad I \dot{\xi} &= r \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (3.9)$$

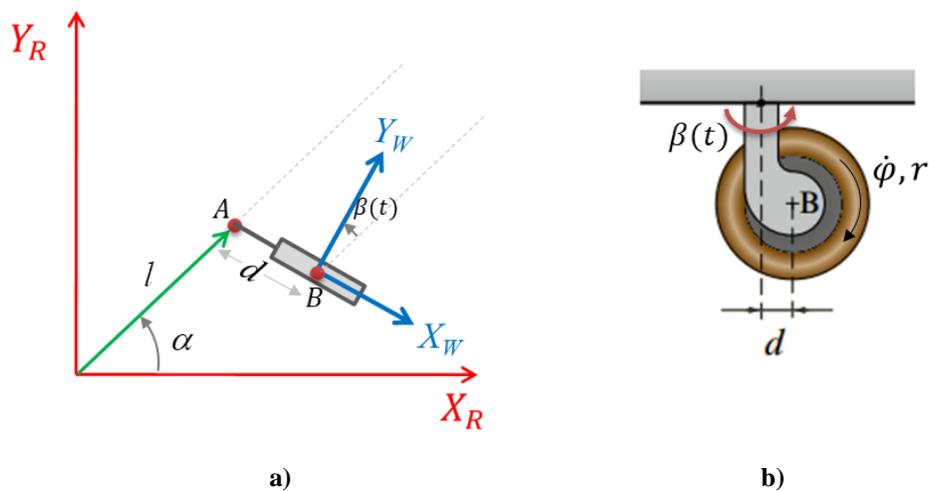
**Restricción de deslizamiento** (perpendicular al plano de la rueda):

$$\begin{aligned} [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)]^R \dot{\xi} &= 0 \\ [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)]^R \mathbf{R}_I \quad I \dot{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Estas restricciones son idénticas a las de la rueda convencional fija, pero a diferencia de  $\dot{\varphi}$  la variable  $\dot{\beta}$  no tiene un impacto directo en las restricciones de movimiento instantáneo del robot. Solo mediante la integración a lo largo del tiempo, los cambios en el ángulo de dirección  $\beta(t)$  pueden afectar la movilidad del vehículo. Esto puede parecer sutil, pero es una distinción muy importante entre el cambio en la posición orientable  $\dot{\beta}$  y el cambio en el giro de las ruedas  $\dot{\varphi}$  [1].

### 3.2.3.3 Rueda Convencional Orientable Descentrada

Las ruedas orientables descentradas o castor pueden girar alrededor de un eje vertical. Sin embargo, a diferencia de la rueda orientable centrada el eje de rotación vertical de una rueda castor no pasa por el punto de contacto con el suelo. En la Figura 3.10 se observa una rueda castor, lo que demuestra que la especificación formal de la posición de la rueda requiere un parámetro adicional.



**Figura 3.10.** Parámetros de una rueda convencional orientable descentrada (castor): **a)** Representación en plano, **b)** Vista lateral.

El punto de contacto de la rueda ahora está en la posición  $B$ , que está conectada por una barra rígida  $AB$  de longitud fija  $d$  al punto  $A$ , fija la ubicación del eje vertical sobre el que gira  $B$  y este punto  $A$  tiene una posición especificada en el sistema de referencia del robot, como se muestra en la Figura 3.10. Suponemos que el plano de la rueda está alineado con  $AB$  en todo momento. Similar a la rueda orientable centrada, la rueda castor tiene dos parámetros que varían

en función del tiempo:  $\varphi(t)$  representa el giro de la rueda en el tiempo y como antes  $\beta(t)$  denota el ángulo de dirección y orientación de  $AB$  en el tiempo.

Para la rueda castor, la restricción de rodadura es idéntica a la ecuación (3.9) porque el eje desplazado no juega ningún papel durante el movimiento que está alineado con el plano de la rueda:

$$\begin{aligned} [\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)]^R \dot{\xi} &= r\dot{\varphi} \\ [\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)]^R \mathbf{R}_I \quad {}^I \dot{\xi} &= r\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sin embargo, la geometría de la rueda tiene un impacto significativo en la restricción de deslizamiento. El problema crítico es que la fuerza lateral sobre la rueda ocurre en el punto  $A$  porque este es el punto de unión de la rueda al chasis. Debido al punto de contacto con el suelo desplazado con respecto a  $A$ , la restricción de que no haya ningún movimiento lateral sería incorrecta. En cambio, la restricción es muy parecida a una restricción de rodadura, en el sentido de que debe tener lugar la rotación adecuada del eje vertical:

$$\begin{aligned} [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l \sin(\beta)]^R \dot{\xi} &= -d\dot{\beta} \\ [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l \sin(\beta)]^R \mathbf{R}_I \quad {}^I \dot{\xi} &= -d\dot{\beta} \end{aligned} \quad (3.12)$$

En la ecuación anterior, cualquier movimiento ortogonal al plano de la rueda debe equilibrarse con una cantidad equivalente y opuesta de movimiento de dirección de la rueda. Este resultado es fundamental para el éxito de las ruedas castor porque al establecer el valor de  $\dot{\beta}$ , cualquier movimiento lateral arbitrario puede ser aceptable. En una rueda orientable centrada, la acción de la dirección  $\beta$  no provoca por sí misma un movimiento del chasis del robot. Pero en una rueda castor, la acción de la dirección  $\beta$  en sí mueve el chasis del robot debido al desplazamiento entre el punto de contacto con el suelo y el eje de rotación vertical [1].

De manera más concisa, se puede suponer a partir de las ecuaciones (3.11) y (3.12) que, dado cualquier movimiento del chasis del robot  ${}^I \dot{\xi}$ , existe algún valor para la velocidad de giro  $\dot{\varphi}$  y la velocidad de dirección  $\dot{\beta}$  de manera que se cumplan las restricciones. Por lo tanto, un robot con solo ruedas castor puede moverse con cualquier velocidad en el espacio de posibles movimientos del robot; llamamos a estos sistemas *omnidireccionales*.

Un ejemplo del mundo real de tal sistema es la silla de oficina de cinco ruedas. Suponiendo que todas las articulaciones pueden moverse libremente, puede seleccionar cualquier vector de movimiento en el plano de la silla y empujarlo con la mano. Sus ruedas castor girarán y se dirigirán según sea necesario para lograr ese movimiento sin deslizamiento del punto de contacto. Del mismo modo, si cada una de las ruedas castor de la silla contuviera dos motores, uno para girar y otro para orientar, entonces un sistema de control podría mover la silla a lo largo de cualquier trayectoria en el plano. Por lo tanto, aunque la cinemática de las ruedas castor es algo compleja, tales ruedas no imponen ninguna restricción real sobre la cinemática del chasis del robot.

Una forma alternativa de representar las dos restricciones cinemáticas de la rueda convencional orientable descentrada (castor) en una expresión matricial más compacta está dada por la forma de restricción Pfaffian la cual se formula a partir de  $\mathbf{a}^T(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$ :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & d + l \sin(\beta) & d & 0 \\ \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos(\beta) & 0 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R \dot{\xi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

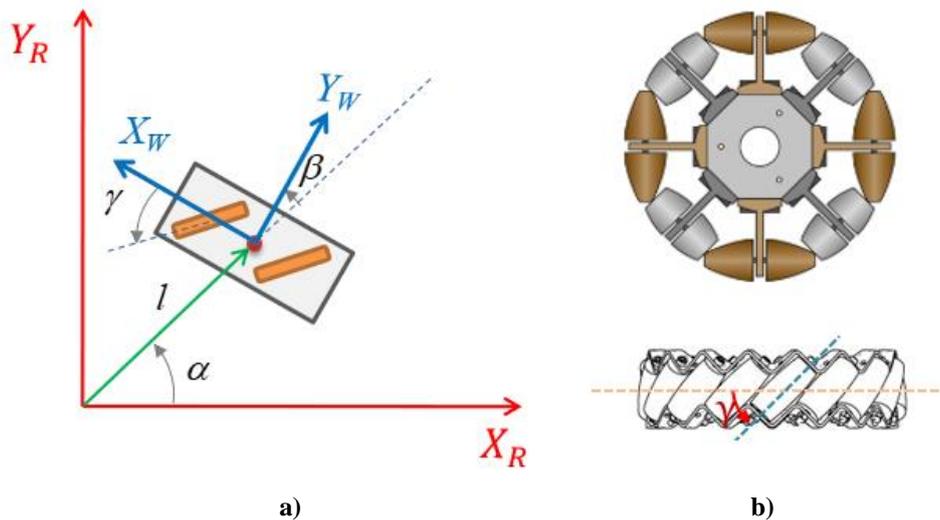
donde

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & d + l \sin(\beta) & d & 0 \\ \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos(\beta) & 0 & -r \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} {}^R \dot{\xi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

### 3.2.3.4 Rueda Especial Sueca o Mecanum

Las ruedas suecas o mecanum no tienen eje de rotación vertical, pero pueden moverse omnidireccionalmente como la rueda castor, esto es posible agregando un grado de libertad a la rueda convencional fija. Las ruedas suecas consisten en una rueda convencional fija con rodillos unidos al perímetro de la rueda con ejes que son antiparalelos al eje principal del componente de la rueda fija. El ángulo exacto  $\gamma$  entre los ejes de los rodillos y el plano de la rueda puede variar, por ejemplo, dada una rueda sueca de 45 grados, los vectores de movimiento del eje principal y los ejes de los rodillos se pueden dibujar como se muestra en la Figura 3.11. Dado que cada eje puede girar en sentido horario o antihorario, se puede combinar cualquier vector a lo largo de un eje con cualquier vector a lo largo del otro eje. Estos dos ejes no son

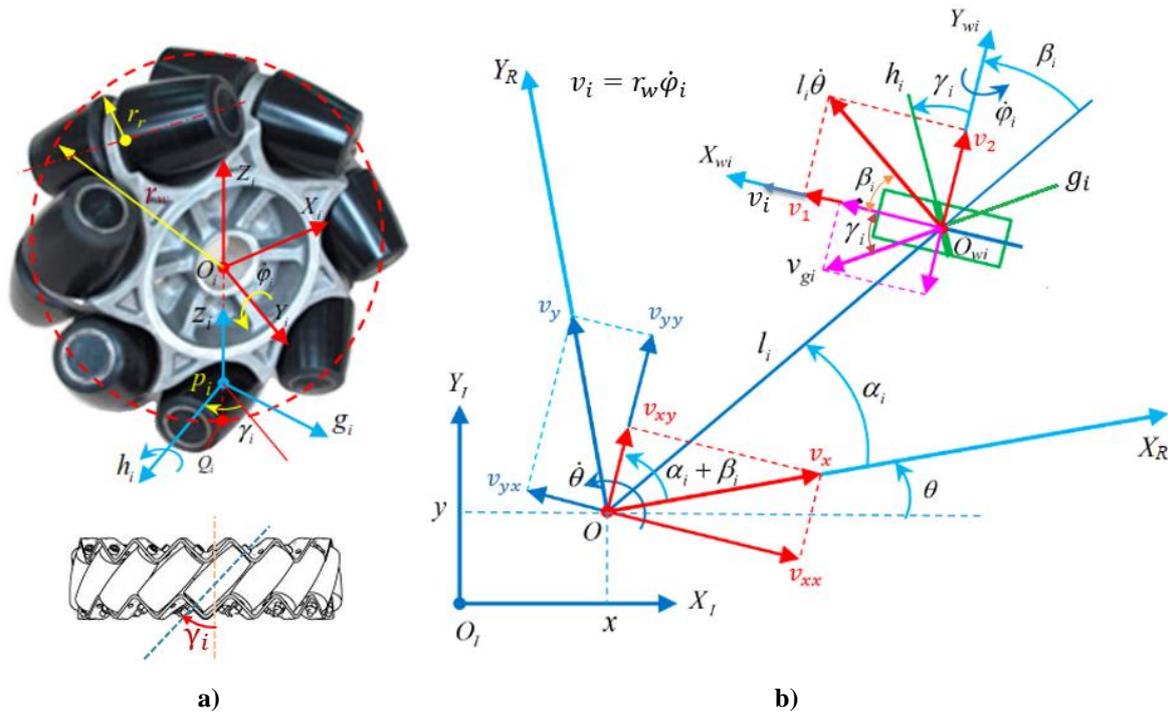
necesariamente independientes (excepto en el caso de la rueda universal de 90 grados); sin embargo, es visualmente claro que se puede lograr cualquier dirección de movimiento deseada eligiendo los dos vectores apropiados [1].



**Figura 3.11.** Parámetros de una rueda sueca (mecanum): **a)** Representación en plano, **b)** Vista lateral y superior.

La postura de una rueda sueca se expresa exactamente como en una rueda estándar fija, con la adición de un término  $\gamma$ , que representa el ángulo entre el plano de la rueda principal y el eje de rotación de los pequeños rodillos circunferenciales. Este ángulo se muestra en la Figura 3.11 dentro del sistema de referencia del robot.

Formular la restricción para una rueda sueca requiere cierta sutileza, puesto que la restricción instantánea se debe a la orientación específica de los pequeños rodillos. El eje alrededor del cual giran estos rodillos es un componente cero de la velocidad en el punto de contacto, es decir, moverse en esa dirección sin girar el eje principal no es posible sin deslizamiento. En la Figura 3.12 se muestra una rueda sueca en donde el ángulo  $\gamma_i$  se ha tomado desde eje de rotación de la rueda al eje de rotación del rodillo, que es una segunda alternativa muy utilizada para determinar las ecuaciones cinemáticas de restricción de la rueda sueca; al culminar este análisis también se determinarán las ecuaciones de restricciones cinemáticas cuando el ángulo  $\gamma_i$  es tomado según como se mostró en la Figura 3.11.



**Figura 3.12.** Restricciones cinemáticas de una rueda Mecanum: a) Vista lateral y superior, b) Representación en plano.

En la Figura 3.12 los sistemas de coordenadas cartesianas de la  $i$ -ésima rueda y el rodillo de la rueda son  $O_i-X_iY_iZ_i$  y  $P_i-g_ih_iZ_i$ ;  $r_w$  y  $r_r$  son el radio de la rueda y el rodillo, respectivamente.  $P_i$  es el centro del rodillo en contacto con el suelo,  $Q_i$  es el punto de contacto entre el rodillo y el suelo, según la hipótesis, ambos están bajo  $O_i$  al mismo tiempo.  $l_i$  y  $\alpha_i$  se utilizan para describir la orientación de instalación relativa del origen  $O$  del sistema de referencia local del robot y el origen  $O_i$  del sistema de referencia de la rueda.  $Y_i$  y  $h_i$  representan la dirección del eje de rotación de una rueda sueca activa y un rodillo pasivo, respectivamente; el ángulo entre el eje  $Y_i$  y  $l_i$  es  $\beta_i$ , que se define como el ángulo de dirección del sistema de referencia local de la rueda;  $\dot{\theta}$  es la velocidad angular de rotación del robot cuando se mueve en el plano. El ángulo entre la proyección del eje  $Y_i$  y el eje  $h_i$  en el plano es el ángulo de inclinación  $\gamma_i$  del rodillo ( $0^\circ < |\gamma_i| < 90^\circ$ ); y  $v_{gi}$  es la velocidad lineal del rodillo que toca el suelo en la  $i$ -ésima rueda sueca.

Las componentes de la velocidad lineal del robot en la dirección del movimiento de la rueda y de su perpendicular están dadas por:

$$\begin{aligned}
 v_{xx} &= v_x \sin(\alpha_i + \beta_i) & v_{yx} &= v_y \cos(\alpha_i + \beta_i) \\
 v_{xy} &= v_x \cos(\alpha_i + \beta_i) & v_{yy} &= v_y \sin(\alpha_i + \beta_i)
 \end{aligned}$$

Las componentes del efecto de la velocidad angular del robot en la dirección del movimiento de la rueda y de su perpendicular están dadas por:

$$v_1 = l_i \dot{\theta} \cos(\beta_i) \quad v_2 = l_i \dot{\theta} \sin(\beta_i)$$

**Restricción de rodadura:** la rueda solo avanza en el eje  $X_i$  en donde la velocidad de la rueda es  $r_w \dot{\phi}_i$  y resulta de la suma algebraica de todas las componentes de velocidad que actúan sobre ese eje.

$$v_{xx} - v_{yx} - v_1 = v_i + v_{gix}$$

$$v_x \sin(\alpha_i + \beta_i) - v_y \cos(\alpha_i + \beta_i) - l_i \dot{\theta} \cos \beta_i = r_w \dot{\phi}_i + v_{gi} \cos \gamma_i \quad (3.14)$$

**Restricción de deslizamiento:** ortogonal a esta dirección, el movimiento lateral no está restringido debido a la rotación libre de los pequeños rodillos. En el eje  $Y_i$  la velocidad de la rueda es la del rodillo libre  $v_{giy}$  y resulta de la suma algebraica de todas las componentes de velocidad que actúan sobre ese eje.

$$v_{xy} + v_{yy} + v_2 = v_{giy}$$

$$v_x \cos(\alpha_i + \beta_i) + v_y \sin(\alpha_i + \beta_i) + l_i \dot{\theta} \sin \beta_i = v_{gi} \sin \gamma_i \quad (3.15)$$

$v_{gi}$  es la velocidad central del rodillo en contacto con el suelo en la rueda  $i$ -ésima. Debido a que los rodillos giran pasivamente, la velocidad de movimiento  $v_{gi}$  es una variable incontrolable (no accesible, ni para sensorizar ni para actuar), por lo que generalmente no se tiene en cuenta ( $v_{gi} = 0$ ). Al eliminar  $v_{gi}$  de las ecuaciones (3.14) y (3.15), obtenemos:

$$v_x \sin(\alpha_i + \beta_i) - v_y \cos(\alpha_i + \beta_i) - l_i \dot{\theta} \cos \beta_i = r_w \dot{\phi}_i \quad (3.16)$$

$$v_x \cos(\alpha_i + \beta_i) + v_y \sin(\alpha_i + \beta_i) + l_i \dot{\theta} \sin \beta_i = 0 \quad (3.17)$$

Multiplicando las ecuaciones (3.16) y (3.17) por  $-\sin \gamma_i$  y  $\cos \gamma_i$ , respectivamente, luego sumando algebraicamente las dos ecuaciones y agrupando términos comunes para posteriormente aplicar las identidades trigonométricas  $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$  y  $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ , se obtiene la ecuación que determina la cinemática de la  $i$ -ésima rueda omnidireccional:

$$v_x \cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) + v_y \sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) + l_i \dot{\theta} \sin(\beta_i + \gamma_i) = -r_w \dot{\phi}_i \sin \gamma_i \quad (3.18)$$

Reemplazando  ${}^R \dot{\xi} = [v_x \ v_y \ \dot{\theta}]^T = [{}^R \dot{x} \ {}^R \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$  y expresando en forma matricial:

$$[\cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \ \sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \ l_i \sin(\beta_i + \gamma_i)]. {}^R \dot{\xi} = -r_w \dot{\phi}_i \sin \gamma_i \quad (3.19)$$

$$[\cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \ \sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \ l_i \sin(\beta_i + \gamma_i)]. {}^R \mathbf{R}_I \ {}^I \dot{\xi} = -r_w \dot{\phi}_i \sin \gamma_i$$

Para determinar la ecuación de restricción cuando el ángulo  $\gamma_i$  es tomado según se muestra en la Figura 3.11, se debe reemplazar  $\gamma_i$  en la ecuación (3.19) por  $\gamma_i + 90^\circ$  y posteriormente aplicar las identidades trigonométricas  $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$  y  $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ , lo cual regenera la ecuación de restricción cinemática dada por:

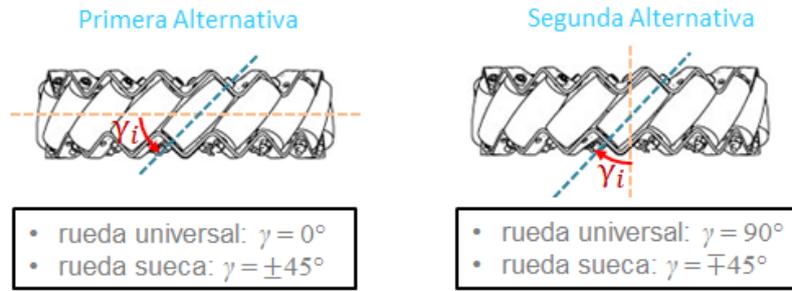
$$v_x \sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) - v_y \cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) - l_i \dot{\theta} \cos(\beta_i + \gamma_i) = r_w \dot{\phi}_i \cos \gamma_i \quad (3.20)$$

Reemplazando  ${}^R \dot{\xi} = [v_x \ v_y \ \dot{\theta}]^T = [{}^R \dot{x} \ {}^R \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$  y expresando en forma matricial:

$$[\sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \ -\cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \ -l_i \cos(\beta_i + \gamma_i)]. {}^R \dot{\xi} = r_w \dot{\phi}_i \cos \gamma_i$$

$$[\sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \ -\cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \ -l_i \cos(\beta_i + \gamma_i)]. {}^R \mathbf{R}_I \ {}^I \dot{\xi} = r_w \dot{\phi}_i \cos \gamma_i \quad (3.21)$$

La restricción de movimiento que se deriva en la ecuación (3.20) parece idéntica a la restricción de rodadura para la rueda convencional fija en la ecuación (3.6), excepto que la fórmula se modifica agregando  $\gamma$  de manera que la dirección efectiva a lo largo de la cual se mantiene la restricción de rodadura es a lo largo de este componente cero en lugar de a lo largo del plano de la rueda. El hecho de haber obtenido ambas ecuaciones (3.18 y 3.20) mediante la suma de las dos restricciones, podría decirse que cualquiera de ellas contiene la información de todas las posibles restricciones de la rueda, por dicha razón solo se utiliza una de ellas (cualquiera) para representar la cinemática de la rueda sueca [11-12]. En la Figura 3.13 se muestran los valores del ángulo  $\gamma$  según el eje de referencia elegido y el tipo de rueda omnidireccional utilizada (sueca o universal). Para la primera alternativa se debe emplear la restricción cinemática dada por la ecuación (3.20 y 3.21) y para la segunda alternativa la ecuación (3.18 y 3.19).



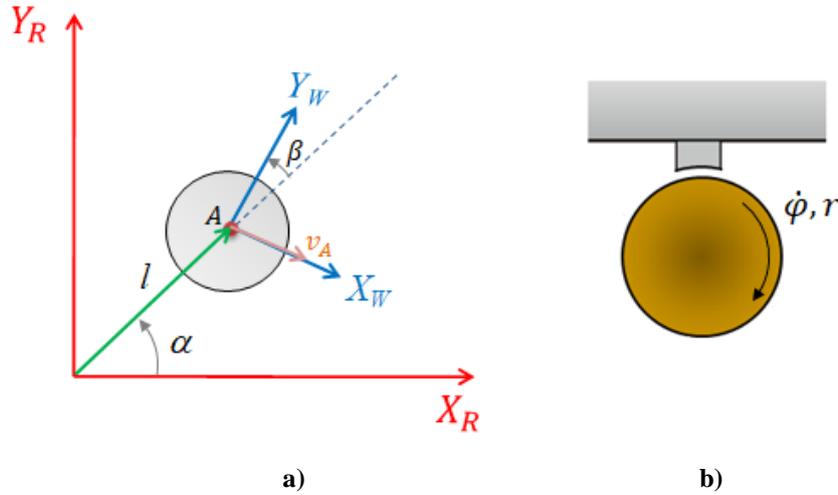
**Figura 3.13.** Valores del ángulo  $\gamma$  dependiendo del eje que se tome como referencia.

El comportamiento de esta restricción y, por lo tanto, el de la rueda sueca cambia drásticamente a medida que varía el valor de  $\gamma$ . Tomemos con referencia el ángulo  $\gamma$  de la Figura 3.11 y consideremos  $\gamma = 0^\circ$ , esto representa la rueda universal; en este caso, el componente cero de la velocidad está en línea con el plano de la rueda, por lo que la ecuación (3.20) se reduce exactamente a la ecuación (3.6), que es la restricción de rodadura de una rueda convencional fija. Pero debido a los rodillos, no hay restricción de deslizamiento ortogonal al plano de la rueda. Al variar el valor de  $\phi_i$ , se puede hacer que cualquier vector de movimiento deseado satisfaga la ecuación (3.20) y, por lo tanto, la rueda es omnidireccional. De hecho, este caso especial del diseño sueco da como resultado un movimiento totalmente desacoplado, en el que los rodillos y la rueda principal proporcionan direcciones de movimiento ortogonales [1]. En el otro extremo, considere  $\gamma = 45^\circ$ , en este caso, los rodillos tienen ejes de rotación que son paralelos al eje de rotación de la rueda principal. Curiosamente, si este valor se sustituye por  $\gamma$  en la ecuación (3.20), el resultado es la restricción de deslizamiento de la rueda convencional fija, ecuación (3.7). En otras palabras, los rodillos no proporcionan ningún beneficio en términos de libertad de movimiento lateral, ya que simplemente están alineados con la rueda principal. Sin embargo, en este caso, la rueda principal nunca necesita girar y, por lo tanto, la restricción de rodadura desaparece.

### 3.2.3.5 Rueda Especial Esférica

El último tipo de rueda, una bola o rueda esférica, no impone restricciones directas al movimiento (Figura 3.14). Un mecanismo de este tipo no tiene un eje principal de rotación y, por lo tanto, no existen restricciones apropiadas de rodadura o deslizamiento. Al igual que con

las ruedas castor y las ruedas suecas, la rueda esférica es claramente omnidireccional y no impone restricciones a la cinemática del chasis del robot.



**Figura 3.14.** Parámetros de una rueda esférica (bola): **a)** Representación en plano, **b)** Vista lateral.

Por lo tanto, la ecuación (3.22) simplemente describe la velocidad de rodamiento de la bola en la dirección del movimiento  $v_A$  del punto  $A$  del robot.

$$\begin{aligned} [\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)]^R \dot{\xi} &= r \dot{\phi} \\ [\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)]^R \mathbf{R}_I \quad {}^I \dot{\xi} &= r \dot{\phi} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Por definición, la rotación de la rueda ortogonal a esta dirección es cero.

$$\begin{aligned} [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)]^R \dot{\xi} &= 0 \\ [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)]^R \mathbf{R}_I \quad {}^I \dot{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como puede verse, las ecuaciones para la rueda esférica son exactamente las mismas que para la rueda convencional fija. Sin embargo, la interpretación de la ecuación (3.23) es diferente. La rueda esférica omnidireccional puede tener cualquier dirección de movimiento arbitraria, donde la dirección de movimiento dada por  $\beta$  es una variable libre deducida de la ecuación (3.23). Considere el caso de que el robot esté en traslación pura en la dirección del eje  $Y_R$ , entonces la ecuación (3.23) se reduce a  $\sin(\alpha + \beta) = 0$ , por lo tanto  $\beta = -\alpha$ , lo que tiene sentido para este caso especial.

### 3.2.4 Modelo Cinemático de Postura del Robot

El modelo cinemático de postura es el más simple de todos y relaciona las velocidades en el sistema de referencia del robot con las velocidades en el sistema de referencia global. Dado un robot móvil equipado con  $M$  ruedas de cualquiera de los tipos descritos en la sección 3.2.3, ahora podemos calcular las restricciones cinemáticas del chasis del robot y por lo tanto su modelo cinemático. La idea clave es que cada rueda impone cero o más restricciones al movimiento del robot, por lo que el proceso consiste simplemente en combinar adecuadamente todas las restricciones cinemáticas que surgen de todas las ruedas en función de la ubicación de esas ruedas en el chasis del robot.

#### 3.2.4.1. Formulación General

Utilizaremos los siguientes subíndices para identificar las cantidades relacionadas con los cuatro tipos de ruedas analizadas:  $f$  para ruedas fijas,  $s$  para ruedas orientables centradas,  $c$  para ruedas orientables descentradas (castor) y  $sw$  para ruedas suecas. El número de ruedas de cada tipo se indica mediante  $N_f$ ,  $N_s$ ,  $N_c$  y  $N_{sw}$ , respectivamente, con:

$$M = N_f + N_s + N_c + N_{sw} \quad (3.24)$$

La configuración del robot se describe completamente mediante los siguientes vectores de coordenadas [2-3]:

- Coordenadas de Postura: vector de posición y orientación del robot respecto al sistema de referencia global  ${}^I\xi = [x \ y \ \theta]^T$ , siendo  ${}^I\dot{\xi} = {}^I\mathbf{R}_R \ {}^R\dot{\xi} = ({}^R\mathbf{R}_I)^T \ {}^R\dot{\xi}$ .
- Coordenadas de Orientación: los  $N_s + N_c$  ángulos de orientación de las ruedas orientables centradas y descentradas, es decir,  $\beta = [\beta_s \ \beta_c]^T$ .
- Coordenadas de Rotación: los  $M$  ángulos de rotación de todas las ruedas, es decir,  $\varphi = [\varphi_f \ \varphi_s \ \varphi_c \ \varphi_{sw}]^T$ .

El conjunto completo de las coordenadas de postura, orientación y rotación expresadas en un único vector  $[x \ y \ \theta \ \beta_s \ \beta_c \ \varphi_f \ \varphi_s \ \varphi_c \ \varphi_{sw}]^T$  se denomina comúnmente como *vector de*

coordenadas de configuración o vector de coordenadas generalizadas, el cual será analizado a mayor detalle en la sección 3.5.

Las **restricciones de rodadura** para las ruedas fijas, orientables centradas y descentradas (castor), así como las restricciones relativas de las ruedas suecas, se pueden escribir en la siguiente forma compacta:

$$\begin{aligned} J_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c)^R \dot{\boldsymbol{\xi}} &= J_2 \dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ J_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c)^R \mathbf{R}_I^{-1} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= J_2 \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

con

$$J_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c) = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s) \\ J_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c) \\ J_{1sw} \end{bmatrix} \quad J_2 = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_M) = r\mathbf{I} \quad (3.26)$$

En esta expresión,  $J_{1f}$ ,  $J_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)$ ,  $J_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c)$  y  $J_{1sw}$  son, respectivamente, matrices de tamaño  $(N_f \times 3)$ ,  $(N_s \times 3)$ ,  $(N_c \times 3)$  y  $(N_{sw} \times 3)$ , cuyas formas se derivan directamente de las restricciones cinemáticas, mientras que  $J_2$  es una matriz diagonal constante de  $(M \times M)$ , cuyas entradas son los radios de la ruedas  $J_2 = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_M) = r\mathbf{I}$ , excepto para los radios de las ruedas suecas que también se multiplican por  $\cos \gamma$ , es decir  $J_2 = r \cos \gamma \mathbf{I}$ .

Para una rueda sueca el valor  $\gamma = 45^\circ$  correspondería a que la dirección de la componente cero de la velocidad sea ortogonal al plano de la rueda. Tal rueda estaría sujeta a una restricción idéntica a la condición antideslizante de una rueda convencional; por lo tanto, se pierde el beneficio de implementar una rueda sueca. Esto implica que  $\gamma \neq 45^\circ$  y que  $J_2$  sea una matriz no singular (invertible) [2].

Las **restricciones de deslizamiento** de las ruedas giratorias se pueden resumir como:

$$\begin{aligned} C_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c)^R \dot{\boldsymbol{\xi}} &= C_2 \dot{\boldsymbol{\beta}}_c \\ C_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c)^R \mathbf{R}_I^{-1} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= C_2 \dot{\boldsymbol{\beta}}_c \end{aligned} \quad (3.27)$$

con

$$\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1f} \\ \mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s) \\ \mathbf{C}_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c) \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{2c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -d\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

donde  $\mathbf{C}_{1f}$ ,  $\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)$  y  $\mathbf{C}_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c)$  son tres matrices respectivamente de dimensiones  $(N_f \times 3)$ ,  $(N_s \times 3)$  y  $(N_c \times 3)$ , cuyas filas se derivan de las restricciones de no deslizamiento de las ecuaciones (3.7), (3.10) y (3.12), respectivamente. En particular,  $\mathbf{C}_{1f}$  es constante, mientras que  $\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)$  y  $\mathbf{C}_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c)$  varían en el tiempo. Además,  $\mathbf{C}_{2c}$  es una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son iguales a  $d$  para las  $N_c$  ruedas castores,  $\mathbf{C}_{2c} = -\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{N_c}) = -d\mathbf{I}$ .

Las dos ecuaciones (3.25 y 3.27) obtenidas a partir de las restricciones de rodadura y deslizamiento se fusionan y producen la siguiente expresión matricial que contiene la información completa de la cinemática del robot:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c) \\ \mathbf{C}_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c) \end{bmatrix} {}^R \dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{C}_2 \dot{\boldsymbol{\beta}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c) \\ \mathbf{C}_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c) \end{bmatrix} {}^R \dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} r\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_c \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Para simplificar mucho más la expresión se utiliza una nueva nomenclatura dada por

$$\mathbf{B} {}^R \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (3.30)$$

en donde cada fila de la matriz  $\mathbf{B}$  contiene todas las restricciones de las ruedas (rodadura y deslizamiento) que componen el robot; la matriz  $\mathbf{D}$  contiene los radios de cada rueda, las distancias de desplazamiento  $d$  para las ruedas castor o cero;  ${}^R \dot{\boldsymbol{\xi}}$  contiene las velocidades lineales y angulares del robot con respecto a su sistema de referencia local  ${}^R \dot{\boldsymbol{\xi}} = [{}^R \dot{x} \quad {}^R \dot{y} \quad \dot{\theta}]^T$  y el vector  $\dot{\boldsymbol{\delta}}$  contiene las velocidades angulares de giro y dirección de todas las ruedas:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = [\dot{\boldsymbol{\varphi}} \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}_c]^T = [\dot{\boldsymbol{\varphi}}_f \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}_s \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}_c \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{sw} \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}_c]^T \quad (3.31)$$

Cabe destacar que mucha de la literatura relacionada con robótica móvil con ruedas suele emplear la variable vectorial  $\dot{\mathbf{p}}$  en vez de  ${}^R \dot{\boldsymbol{\xi}}$  para agrupar las velocidades del robot, así como la variable  $\dot{\mathbf{q}}$  en vez de  $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ , pero debido a que la variable  $\mathbf{q}$  y su derivada  $\dot{\mathbf{q}}$  serán utilizadas en

las secciones 3.4 y 3.5 con otros fines de modelamiento se optó por no emplearla en este análisis inicial para no causar confusiones.

Otra forma alternativa de expresar el modelo cinemático del robot móvil es utilizando coordenadas y velocidades generalizadas según se explica y se detalla en la sección 3.5.

### 3.2.4.2 Robot con Ruedas Fijas y Orientables Centradas

Observe que a partir de las restricciones cinemáticas de las ruedas en las ecuaciones (3.11), (3.12), (3.19) y (3.21) que la rueda castor, la rueda sueca y la rueda esférica no imponen restricciones cinemáticas en el chasis del robot, ya que  ${}^I\dot{\xi}$  puede variar libremente en todos estos casos debido a los grados de libertad internos de la rueda.

Por lo tanto, solo las ruedas convencionales fijas y las ruedas convencionales orientables centradas tienen impacto en la cinemática del chasis del robot y, por consiguiente, requieren consideración al calcular las restricciones cinemáticas. Suponga que el robot tiene un total de  $N$  ruedas convencionales, que comprenden  $N_f$  ruedas fijas y  $N_s$  ruedas orientables centradas. Utilizamos  $\beta_s$  para denotar los ángulos de dirección variables de las  $N_s$  ruedas orientables centradas, por el contrario,  $\beta_f$  se refiere a la orientación de las  $N_f$  ruedas fijas. En el caso de la rotación de las ruedas, tanto las ruedas fijas como las orientables tienen rotaciones angulares alrededor del eje horizontal que varían en función del tiempo. Denotamos los casos fijos y orientables por separado como  $\varphi_f$  y  $\varphi_s$  y usamos  $\varphi$  como una matriz que combina ambos valores  $\varphi = [\varphi_f \quad \varphi_s]^T$ .

Las *restricciones de rodadura* de todas las ruedas ahora se pueden reducir a una simple expresión dada por:

$$\begin{aligned} J_1(\beta_s) {}^R\dot{\xi} &= J_2 \dot{\varphi} \\ J_1(\beta_s) {}^R R_I {}^I\dot{\xi} &= J_2 \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (3.32)$$

con

$$J_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1s}(\beta_s) \end{bmatrix} \quad J_2 = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_N) = rI \quad (3.33)$$

Tenga en cuenta que  $J_1(\beta_s)$  solo está en función de  $\beta_s$  y no  $\beta_f$ , esto se debe a que las orientaciones de las ruedas orientables centradas varían en función del tiempo, mientras que las orientaciones de las ruedas fijas son constantes. Por tanto,  $J_{1f}$  es una matriz constante de proyecciones para todas las ruedas fijas con un tamaño de  $(N_f \times 3)$  y donde cada fila consta de los tres términos de la ecuación  $[\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)]^R \dot{\xi} = r\dot{\phi}$  para cada rueda fija convencional.  $J_{1s}(\beta_s)$  es una matriz de tamaño  $(N_s \times 3)$ , con cada fila compuesta por los tres términos de la ecuación  $[\sin(\alpha + \beta(t)) \quad -\cos(\alpha + \beta(t)) \quad -l \cos\beta(t)]^R \dot{\xi} = r\dot{\phi}$  para cada rueda orientable centrada.

En resumen, la ecuación (3.32) representa la restricción de que todas las ruedas convencionales deben girar alrededor de su eje horizontal una cantidad adecuada en función de sus movimientos a lo largo del plano de la rueda para que se produzca rodamiento en el punto de contacto con el suelo [1]. Partiendo de la expresión mostrada en (3.27), las *restricciones de deslizamiento* de todas las ruedas fijas y orientables centradas se reduce a:

$$\begin{aligned} C_1^*(\beta_s) {}^R \dot{\xi} &= 0 \\ C_1^*(\beta_s) {}^R R_l {}^I \dot{\xi} &= 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

con

$$C_1^*(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_s) \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

donde  $C_{1f}$  y  $C_{1s}(\beta_s)$  son matrices de tamaño  $(N_f \times 3)$  y  $(N_s \times 3)$ , cuyas filas están compuestas por los tres términos de las ecuaciones  $[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)]^R \dot{\xi} = 0$  y  $[\cos(\alpha + \beta(t)) \quad \sin(\alpha + \beta(t)) \quad l \sin \beta(t)]^R \dot{\xi} = 0$  para todas las ruedas fijas y orientables centradas, respectivamente. Por tanto, la ecuación (3.34) es una restricción sobre todas las ruedas convencionales de que sus componentes de movimiento ortogonales a los planos de sus ruedas deben ser cero. Esta restricción de deslizamiento tiene el impacto más significativo en la definición de la maniobrabilidad general del chasis del robot, como se explica en la sección 3.3.

Nuevamente ambas restricciones se pueden combinar en una sola expresión matricial que contiene la cinemática completa para un robot compuesto únicamente por ruedas fijas y orientables centradas:

$$\begin{bmatrix} J_1(\beta_s) \\ C_1^*(\beta_s) \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = \begin{bmatrix} rI \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\phi} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} {}^R \dot{\xi} = \mathbf{D} \dot{\phi} \quad (3.36)$$

Donde ahora cada fila de la matriz  $\mathbf{B}$  contiene todas las restricciones de las ruedas fijas y orientables centradas; la matriz  $\mathbf{D}$  contiene los radios de cada rueda o cero;  ${}^R \dot{\xi}$  contiene las velocidades lineales y angulares del robot con respecto a su sistema de referencia local y el vector  $\dot{\phi}$  solo contiene las velocidades angulares de giro de todas las ruedas:

$$\dot{\phi} = [\dot{\phi}_f \quad \dot{\phi}_s]^T \quad (3.37)$$

### 3.2.4.3 Cinemática Directa e Inversa – Matriz Jacobiana

Para obtener los movimientos del robot móvil debemos sintonizar adecuadamente los movimientos de las variables articulares relacionadas con cada rueda, expresadas por las velocidades angulares del vector  $\dot{\delta} = [\dot{\phi}_f \quad \dot{\phi}_s \quad \dot{\phi}_c \quad \dot{\phi}_{sw} \quad \dot{\beta}_c]^T$ . Por tanto, necesitamos encontrar la relación diferencial entre  $\dot{\delta}$  y  ${}^R \dot{\xi}$ ; a esta relación se la conoce como cinemática diferencial directa y se expresa mediante:

$${}^R \dot{\xi} = \mathbf{J} \dot{\delta} \quad (3.38a)$$

donde  $\mathbf{J}$  es conocida como la *matriz jacobiana* del robot de tamaño  $(m \times n)$  respecto al sistema de referencia local del robot;  $m$  corresponde al número de variables que determinan las velocidades angulares de las ruedas y  $n$  el número de variables que determinan las velocidades lineales y angular del robot sobre el plano. Para cada configuración  $\dot{\phi}_f, \dot{\phi}_s, \dot{\phi}_c, \dot{\phi}_{sw}, \dot{\beta}_c$  del robot, la matriz jacobiana representa la relación de las velocidades angulares de las ruedas con las velocidades lineales y angulares del chasis del robot en el espacio de tarea [3, 5, 8].

Se puede determinar las velocidades del robot respecto al sistema de referencia global  ${}^I \dot{\xi}$ , reemplazando la ecuación (3.38a) en (3.4) con lo que se obtiene:

$${}^I\dot{\xi} = {}^I\mathbf{R}_R \mathbf{J} \dot{\delta} = ({}^R\mathbf{R}_I)^{-1} \mathbf{J} \dot{\delta} = ({}^R\mathbf{R}_I)^T \mathbf{J} \dot{\delta} \quad (3.38b)$$

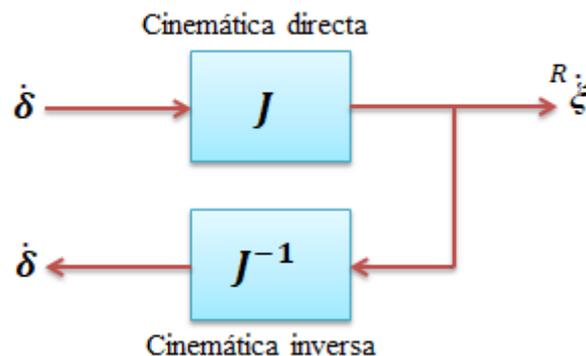
La relación (3.38b) puede interpretarse como una representación del espacio de estados del modelo, que refleja la restricción de movilidad inducida por las restricciones cinemáticas de las ruedas; a esta representación se suele denominar *modelo cinemático de postura*, con las coordenadas de postura  ${}^I\xi$  y posiblemente las coordenadas de orientación  $\beta_s$  como variables de estado, mientras que  $\dot{\delta}$  y  $\dot{\beta}_s$  son análogas a las velocidades y se pueden interpretar como las entradas de control que ingresan al modelo linealmente. Si comparamos la expresión  $\mathbf{B}^R \dot{\xi} = \mathbf{D} \dot{\delta}$  con la ecuación (3.38.a) es posible determinar el valor de la matriz jacobiana, la cual está dada por:

$$\mathbf{J} = \mathbf{B}^+ \mathbf{D} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \quad (3.39)$$

donde  $\mathbf{B}^+$  es la matriz pseudo-inversa de  $\mathbf{B}$ , la cual es una generalización de la matriz inversa. Obviamente, en el caso de que el robot no tenga ruedas orientables centradas la matriz  $\mathbf{J}$  será constante, caso contrario,  $\mathbf{J}$  dependerá explícitamente de los ángulos de orientación  $\beta_s$ .

También es posible relacionar el vector  ${}^R\dot{\xi}$  con las velocidades angulares de las ruedas con la finalidad de encontrar el vector  $\dot{\delta}$ , en cuyo caso esta relación se la conoce como cinemática diferencial inversa (ver Figura 3.15) y se expresa mediante:

$$\dot{\delta} = \mathbf{J}^{-1} {}^R\dot{\xi} \quad (3.40)$$



**Figura 3.15.** Cinemática diferencial inversa y directa mediante matriz jacobiana.

donde  $J^{-1}$  es conocida como la *matriz jacobiana inversa* del robot. Si comparamos la expresión  $\mathbf{B}^R \dot{\xi} = \mathbf{D} \delta$  con la ecuación (3.40) es posible determinar el valor de la matriz jacobiana inversa la cual está dada por:

$$J^{-1} = D^+ B = (D^T D)^{-1} D^T B \quad (3.41)$$

De forma general la matriz jacobina  $J$  ( $m \times n$ ) puede ser una matriz cuadrada o rectangular dependiendo del tipo y número de ruedas del robot. Si se obtiene primero  $J$  es posible determinar la cinemática diferencial inversa directamente de esta matriz mediante su inversa generalizada  $J^+$ :

$$\delta = J^+ {}^R \dot{\xi} \quad (3.42)$$

tomando en consideración los siguientes puntos:

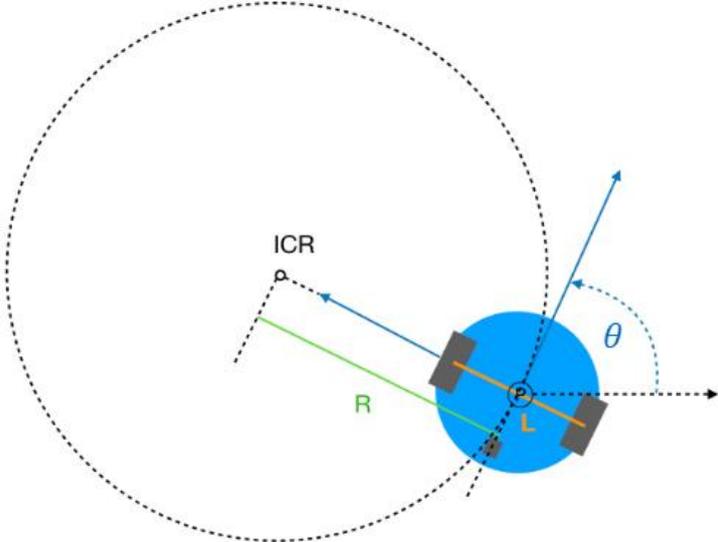
1. Si  $m = n$ , la matriz  $J$  es cuadrada y no singular (invertible), luego  $J^+ = J^{-1}$ .
2. Si  $m > n$ , la matriz  $J$  es rectangular y tiene rango  $n$ , es decir, el vector  $\delta$  está sobre-especificado. En este caso  $J^+ = (J^T J)^{-1} J^T$ .
3. Si  $m < n$ , la matriz  $J$  es rectangular y tiene rango  $m$ , es decir, el vector  $\delta$  está sub-especificado y muchas opciones de  $\delta$  conducen al mismo vector  ${}^R \dot{\xi}$ . En este caso  $J^+ = J^T (J J^T)^{-1}$ .

Los tres criterios utilizados para determinar la inversa generalizada de la matriz jacobiana  $J^+$ , también son válidos para ser aplicados sobre las matrices pseudo-inversas  $B^+$  y  $D^+$ .

#### 3.2.4.4 Centro Instantáneo de Rotación

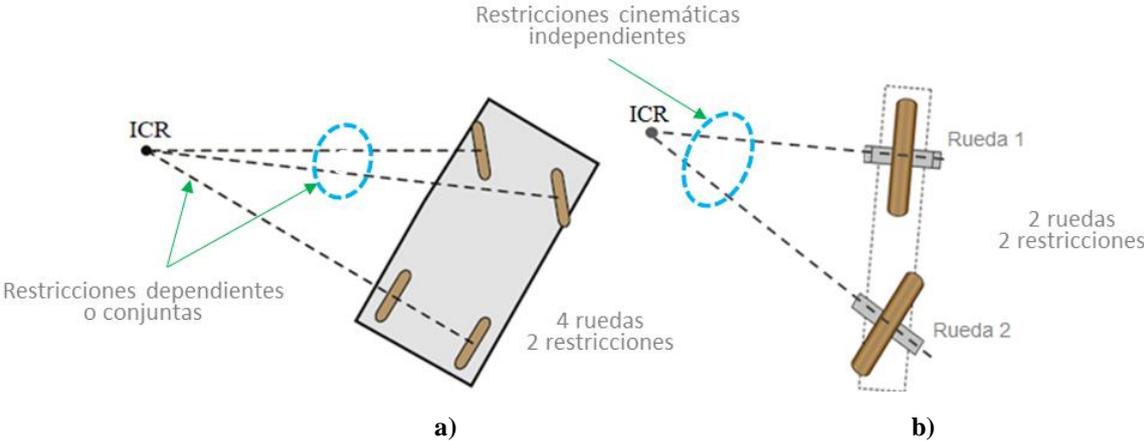
El movimiento de un robot móvil con ruedas puede ser representado como una rotación alrededor de un punto (Figura 3.16), el cual se denomina Centro Instantáneo de Rotación (ICR, *Instantaneous Center of Rotation*) o a veces llamado Centro Instantáneo de Curvatura (ICC, *Instantaneous Center of Curvature*). Este punto ICR se define como el punto en donde se cruzan los ejes de todas las ruedas y alrededor del cual el robot gira en un instante determinado y cuya posición con respecto al chasis del robot puede variar en el tiempo [1-5]. Las restricciones

cinemáticas (ecuaciones 3.34 y 3.35) también se pueden demostrar geoméricamente usando el concepto de Centro Instantáneo de Rotación de un robot.



**Figura 3.16.** Representación e interpretación del centro instantáneo de rotación (ICR).

Considere una sola rueda convencional, la cual es forzada por la restricción de deslizamiento para no poder moverse lateralmente, es decir, a lo largo de la línea determinada por su eje de rotación. Esto se puede mostrar geoméricamente dibujando una línea de movimiento cero a través de su eje horizontal, perpendicular al plano de la rueda (Figura 3.17).



**Figura 3.17.** Determinación del ICR para un robot móvil con ruedas: **a)** Ackerman, **b)** Bicicleta.

En cualquier instante dado, el movimiento de la rueda a lo largo de la línea de movimiento cero debe ser cero. En otras palabras, la rueda debe moverse instantáneamente a lo largo de algún círculo instantáneo de radio  $R$  de manera que el centro de ese círculo esté ubicado sobre la línea

de movimiento cero. Este punto central, llamado centro instantáneo de rotación ICR, puede encontrarse en cualquier lugar a lo largo de la línea de movimiento cero. Cuando  $R$  tiende o está al infinito, la rueda se mueve en línea recta.

Un robot con configuración Ackerman como el mostrado en la Figura 3.17 (a) puede tener varias ruedas, pero siempre debe tener un solo ICR. Debido a que todas sus líneas de movimiento cero se unen en un solo punto, existe una única solución para el movimiento del robot, colocando el ICR en este punto de encuentro. Esta construcción geométrica del ICR demuestra cómo la movilidad del robot es una función del número de restricciones en el movimiento del robot y no del número de ruedas. En la Figura 3.17 (b), la configuración bicicleta que se muestra tiene dos ruedas, donde cada rueda aporta una restricción o una línea de movimiento cero. En conjunto, las dos restricciones dan como resultado un solo punto como la única solución para el ICR, esto se debe a que las dos restricciones son independientes y, por lo tanto, cada una restringe aún más el movimiento general del robot.

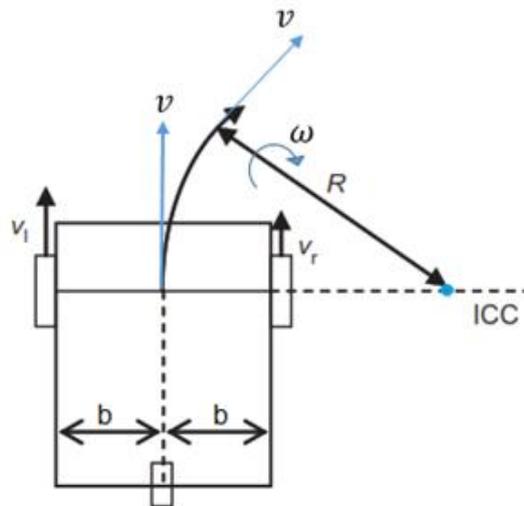
Pero en el caso del robot de accionamiento diferencial de la Figura 3.16 y la Figura 3.18, las dos ruedas traseras están alineadas a lo largo del mismo eje horizontal, es decir, que las ruedas no imponen restricciones independientes. Por lo tanto, el ICR está obligado a situarse a lo largo de una línea y no en un punto específico, con lo que cualquier punto sobre la línea común de movimiento cero puede ser un ICR. De hecho, la segunda rueda no impone restricciones cinemáticas adicionales al movimiento del robot, ya que su línea de movimiento cero es idéntica a la de la primera rueda, esto significa que solo hay una restricción cinemática independiente.

Por lo tanto, aunque la configuración bicicleta y el chasis con accionamiento diferencial tienen el mismo número de ruedas activas no omnidireccionales, el primero tiene dos restricciones cinemáticas independientes mientras que el segundo tiene solo una restricción cinemática independiente dada por las dos ruedas traseras motorizadas.

El robot con configuración Ackerman de la Figura 3.17 (a) demuestra otra forma en la que una rueda puede ser incapaz de contribuir con una restricción independiente a la cinemática del robot; el robot tiene cuatro ruedas convencionales pero dos restricciones cinemáticas independientes. Este vehículo tiene dos ruedas orientables centradas delanteras y dada la posición instantánea de solo una de estas ruedas orientables y la posición de las ruedas fijas traseras, existe una única solución para el ICR que se encuentra en la línea de movimiento cero determinada por el eje común de las ruedas traseras. La posición de la segunda rueda orientable

está absolutamente restringida por el ICC, por lo tanto, no ofrece restricciones independientes al movimiento del robot. En conclusión, las dos ruedas fijas traseras imponen una única restricción (como en el accionamiento diferencial), y también las dos ruedas orientables delanteras imponen una segunda restricción cinemática.

En cada instante, la velocidad lineal  $v$  de cualquier punto del chasis del robot es ortogonal a la línea recta  $R$  que une este punto y el ICC, esto es cierto, en particular, para los centros de las ruedas fijas y orientables centradas que son puntos fijos del chasis, por ejemplo, un robot con accionamiento diferencial como el mostrado en la Figura 3.18 en donde cualquier punto del chasis (incluyendo las ruedas) giran a una misma velocidad angular  $\omega$  con respecto al ICC. Por otro lado, la restricción de deslizamiento implica que la velocidad del centro de la rueda está alineada con el plano de la rueda. Estos dos hechos implican que los ejes de rotación horizontal de las ruedas fijas y orientables centradas se cruzan en el ICC.



**Figura 3.18.** Parámetros para un robot con accionamiento diferencial.

Para el robot diferencial de la Figura 3.18 se considera que la velocidad lineal de la rueda izquierda  $v_l$  es mayor que la velocidad lineal de la rueda derecha  $v_r$  ( $v_l > v_r$ ), las cuales pueden ser obtenidas mediante:

$$v_l = \omega(R + b) = \omega R + \omega b$$

$$v_r = \omega(R - b) = \omega R - \omega b$$

La relación entre velocidad lineal y angular del robot está dada por  $v = \omega R$ , por tanto, las ecuaciones anteriores se pueden expresar como:

$$v_l = v + \omega b \quad v_r = v - \omega b$$

Sumando y restando las ecuaciones anteriores con la finalidad de obtener las velocidades  $v$  y  $\omega$  se obtiene:

$$v = \frac{1}{2}(v_l + v_r) \quad \omega = \frac{1}{2b}(v_l - v_r)$$

La expresión  $v = \omega R$  se reescribe para determinar el valor del radio  $R$  de giro del robot cuyo centro es el ICR:

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{b(v_l + v_r)}{(v_l - v_r)} \quad (3.43)$$

Como se observa en la expresión anterior el valor de  $R$  depende de las velocidades lineales de las dos ruedas del robot diferencial. Cuando  $v_l = v_r$  tenemos  $R = \infty$ , es decir, el robot tiene movimiento recto y cuando  $v_l = -v_r$  tenemos  $R = 0$ , es decir, el robot tiene movimiento de rotación sin avance.

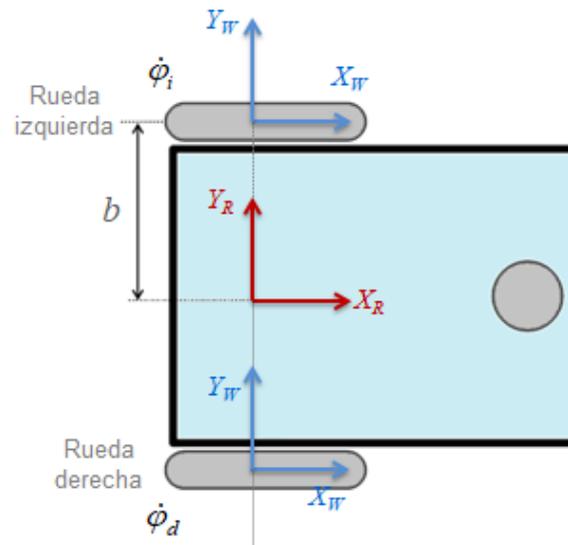
### 3.2.5 Modelo Cinemático del Robot Diferencial

En la sección 2.4.3 del Capítulo 2 presentamos las características básicas de funcionamiento y diseño de un robot con accionamiento diferencial con tres ruedas. Esta configuración es un mecanismo de conducción muy simple que a menudo es utilizado en la práctica, especialmente para robots móviles pequeños y robots utilizados en interiores.

Los robots con esta configuración suelen tener una o más ruedas libres (castor o esféricas) para apoyo del chasis y para prevenir la inclinación; en este análisis solo se va a utilizar una de ellas. Dos ruedas fijas principales se colocan en un eje común y la velocidad de cada rueda fija está controlada por un motor independiente. Las ruedas del robot tienen radio  $r$  y la distancia entre las mismas es  $2b$ . La geometría y varios de los parámetros cinemáticos de este robot se muestran en la Figura 3.19. Las siguientes consideraciones adicionales deben ser tomadas en consideración para el análisis cinemático del robot:

- El centro de masa del robot coincide con su centro geométrico
- El sistema de referencia del robot se asigna entre ambas ruedas y sobre el eje de giro de estas.

- La rueda omnidireccional de apoyo no genera restricciones
- La velocidad de giro de la rueda derecha es  $\dot{\phi}_d$  y de la izquierda es  $\dot{\phi}_i$



**Figura 3.19.** Geometría de un robot con accionamiento direccional.

Ahora podemos usar las herramientas presentadas anteriormente para construir la expresión cinemática de este robot, mediante las ecuaciones de restricción de rodadura y deslizamiento de las ruedas fijas obtenidas en la sección 3.2.3.1 y también empleando el concepto de Centro Instantáneo de Rotación el cual se vale de un análisis geométrico del movimiento del robot.

### 3.2.5.1 Análisis mediante las Ecuaciones de Restricción de las Ruedas

Primero, partimos de las ecuaciones de restricción de las ruedas convencionales fijas deducidas en la sección 3.2.3.1:

Restricción de rodadura (en el plano de la rueda):

$$[\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)]^R \dot{\xi} = r \dot{\phi}$$

Restricción de deslizamiento (perpendicular al plano de la rueda):

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)]^R \dot{\xi} = 0$$

Estas ecuaciones relacionan el movimiento del robot con las restricciones de rodamiento y deslizamiento y deben de ser aplicadas por separado a las dos ruedas activas del robot. Para

emplear las dos fórmulas de restricción, primero debemos identificar los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para cada rueda. Como la tercera rueda omnidireccional es pasiva y puede moverse libremente en cualquier dirección (rueda loca), ignoramos por completo este tercer punto de contacto para el cálculo de restricciones.

Suponga que el sistema de referencia local del robot  $(X_R, Y_R)$  está alineado de manera que el robot se mueve hacia adelante a lo largo del eje positivo  $X_R$ , como se muestra en la Figura 3.19. En este caso, para la rueda fija derecha  $\alpha = -90^\circ$ ,  $\beta = 180^\circ$  y  $l = b$ , siempre y cuando no se tome en consideración el sentido del desplazamiento, pero si el sentido de giro de los ángulos, por el contrario, si no se toma en consideración el sentido de giro de los ángulos, pero si el sentido del desplazamiento los valores serían  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  y  $l = -b$ . Para la rueda fija izquierda y bajo el segundo supuesto comentado para la rueda derecha los valores de las de las variables serían  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  y  $l = b$ . Reemplazando estos valores en las ecuaciones de restricción para cada rueda fija se obtiene:

Restricciones de rodadura y deslizamiento para la rueda derecha:

$$[1 \quad 0 \quad b]^R \dot{\xi} = r \dot{\phi}_d$$

$$[0 \quad 1 \quad 0]^R \dot{\xi} = 0$$

Restricciones de rodadura y deslizamiento para la rueda izquierda:

$$[1 \quad 0 \quad -b]^R \dot{\xi} = r \dot{\phi}_i$$

$$[0 \quad 1 \quad 0]^R \dot{\xi} = 0$$

A partir de estas ecuaciones matriciales construiremos las matrices  $J_1(\beta_s)$ ,  $C_1^*(\beta_s)$  y  $J_2$ . Además, considerando que las dos ruedas motrices no son orientables, las dos primeras matrices solo están compuestas por los términos  $J_{1f}$  y  $C_{1f}$  respectivamente, así se obtiene que:

$$J_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \end{bmatrix} \quad C_1^*(\beta_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

La fusión de estas tres matrices a partir de (3.36) da como resultado la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} J_1(\beta_s) \\ C_1^*(\beta_s) \end{bmatrix}^R \dot{\xi} = \begin{bmatrix} J_2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

A partir de la expresión anterior se determina la matriz jacobiana, la cual permite obtener la expresión cinemática diferencial directa  ${}^R \dot{\xi} = \mathbf{J} \dot{\phi}$  de este robot, conociendo que  $m > n$  en la matriz  $\mathbf{B}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \mathbf{B}^+ \mathbf{D} &= (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \\ {}^R \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \dot{\phi} \quad \begin{bmatrix} {}^R \dot{x} \\ {}^R \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Por lo tanto, la expresión para la velocidad lineal y angular del robot en función de la velocidad de las ruedas con respecto a su sistema de referencia local quedaría:

$${}^R \dot{x} = v = \frac{r}{2} (\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_i) \quad \dot{\theta} = \omega = \frac{r}{2b} (\dot{\phi}_d - \dot{\phi}_i) \quad (3.45)$$

La cinemática directa en el sistema inercial quedaría:

$$\begin{aligned} {}^I \dot{\xi} &= {}^I \mathbf{R}_R {}^R \dot{\xi} = ({}^R \mathbf{R}_I)^{-1} {}^R \dot{\xi} \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\theta \\ v \sin\theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Las velocidades respecto al sistema inercial y en función de las velocidades lineales y angulares locales del robot quedan:

$$\dot{x} = v \cos\theta \quad \dot{y} = v \sin\theta \quad \dot{\theta} = \omega \quad (3.47)$$

$$\dot{x} = \frac{r}{2}(\dot{\phi}_d \cos\theta + \dot{\phi}_i \cos\theta) \quad \dot{y} = \frac{r}{2}(\dot{\phi}_d \sin\theta + \dot{\phi}_i \sin\theta) \quad \dot{\theta} = \frac{r}{2b}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}_i) \quad (3.48)$$

La matriz jacobiana inversa puede ser obtenida a partir de la expresión  $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{D}^+ \mathbf{B} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{B}$  o utilizando directamente la matriz jacobiana mediante  $\mathbf{J}^+ = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T$ :

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & \frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{b}{r} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

La representación matricial de la cinemática inversa diferencial respecto al sistema de referencia local del robot es:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{J}^{-1} {}^R \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R \dot{x} \\ {}^R \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Para calcular la cinemática inversa respecto al sistema de coordenadas global reemplazamos en la expresión anterior la relación  ${}^R \dot{\boldsymbol{\xi}} = {}^R \mathbf{R}_I {}^I \dot{\boldsymbol{\xi}}$ , con lo cual se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{J}^{-1} {}^R \mathbf{R}_I {}^I \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$${}^I \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$${}^I \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & b \\ \cos\theta & \sin\theta & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Las ecuaciones obtenidas proporcionan las relaciones cinemáticas correctas entre las variables de movimiento y rotación en el plano  $xy$ , pero no incluyen la complejidad de la suspensión o la dinámica del motor. Tampoco se incluyen en este modelo el cabeceo (*pitch*) y balanceo (*roll*) del robot. En la Figura 3.20 se presenta el código desarrollado en Matlab para determinar las expresiones matemáticas de la cinemática directa e inversa de un robot diferencial partiendo de las ecuaciones encontradas en esta sección.

```

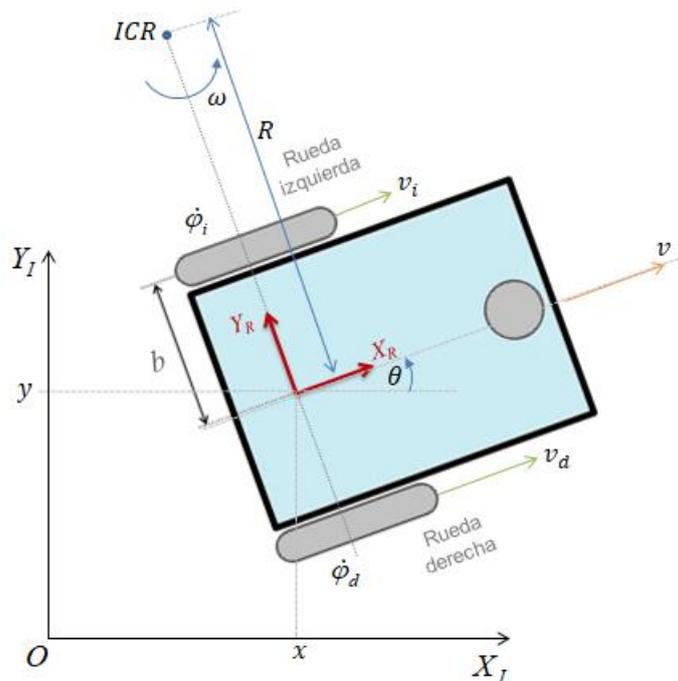
%Creación de variables simbólicas
syms b r d beta theta
%Definición de la matrices B y D
B=[1 0 0;sin(beta) -cos(beta) -d*cos(beta);0 1 0]
D=[r; 0; 0]
%Cálculo de la cinemática directa respecto al sistema local
invB=simplify(inv(B'*B)*B')
J=invB*D %matriz Jacobiana
%Cálculo de la cinemática directa respecto al sistema global
R=[cos(theta) -sin(theta) 0;sin(theta) cos(theta) 0;0 0 1]
Jglobal=R*J
%Cálculo de la cinemática inversa respecto al sistema local
invD=simplify(inv(D'*D)*D')
invJ=invD*B %matriz Jacobiana inversa

```

**Figura 3.20.** Código en Matlab para determinar la cinemática directa e inversa de un robot diferencial.

### 3.2.5.2 Análisis mediante el Centro Instantáneo de Rotación

De acuerdo con la Figura 3.21, las variables de entrada (control) son la velocidad de la rueda derecha  $v_d$  y la velocidad de la rueda izquierda  $v_i$ , en donde para el análisis se asume que  $v_d > v_i$ .  $R$  es el radio instantáneo de la trayectoria de conducción del robot y que corresponde a la distancia entre el centro del chasis (punto medio entre las ruedas activas) y el punto ICR. En cada instancia de tiempo, ambas ruedas tienen la misma velocidad angular  $\omega$  alrededor del ICR.



**Figura 3.21.** Geometría de un robot con accionamiento direccional con representación del ICR.

Las velocidades lineales de cada rueda se obtienen a partir de:

$$v_d = \omega(R + b) \quad v_i = \omega(R - b)$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores es posible determinar  $\omega$  y  $R$  en función de las velocidades lineales de las ruedas:

$$\omega = \frac{v_d - v_i}{2b} \quad R = \frac{b(v_d + v_i)}{v_d - v_i} \quad (3.51)$$

La velocidad tangencial del robot se calcula entonces como

$$v = \omega R = \frac{v_d + v_i}{2} \quad (3.52)$$

Las velocidades tangenciales de las ruedas son  $v_i = r\dot{\phi}_i$  y  $v_d = r\dot{\phi}_d$  donde  $\dot{\phi}_i$  y  $\dot{\phi}_d$  son las velocidades angulares izquierda y derecha de las ruedas alrededor de sus ejes, respectivamente. Reemplazando estos valores en las expresiones  $v$  y  $\omega$  de las ecuaciones (3.51) y (3.52) se obtiene:

$$v = \frac{r\dot{\phi}_d + r\dot{\phi}_i}{2} = \frac{r}{2}\dot{\phi}_d + \frac{r}{2}\dot{\phi}_i \quad (3.53)$$

$$\omega = \frac{r\dot{\phi}_d - r\dot{\phi}_i}{2b} = \frac{r}{2b}\dot{\phi}_d - \frac{r}{2b}\dot{\phi}_i \quad (3.54)$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, la cinemática directa del robot (en coordenadas locales) se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} {}^R\dot{x} \\ {}^R\dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix}$$

Que corresponde a la misma expresión (3.44) obtenida mediante las ecuaciones de restricción de rodadura y deslizamiento de cada una de las ruedas. El resto de las ecuaciones, incluyendo las de la cinemática inversa se obtienen de la misma manera como se analizó en la sección anterior.

### 3.2.5.3 Estimación de la Postura mediante Odometría

La estimación computacional de la postura relativa (posición y orientación) de un robot móvil sobre el plano en algún instante  $t$  se obtiene mediante la integración del modelo cinemático respecto al sistema de referencia global; este método es conocido como *odometría* (*dead reckoning*). La odometría es un método de navegación utilizado en barcos, aviones, automóviles y más recientemente en robots móviles [4-9].

La odometría es el uso de datos de sensores para estimar la postura de un objeto en movimiento en el plano; además de los sensores de rueda (como encoders, por ejemplo), se utilizan sensores de orientación angular (como giroscopios, por ejemplo). Los robots utilizan la odometría para determinar su postura en relación con una ubicación inicial. Este método es sensible a los errores de integración donde los errores aumentan con el tiempo.

Definimos como ubicación inicial aquel punto en el que se comienza a calcular la postura mediante odometría. Para que nos entendamos, aquel punto en el que encendemos el robot y empieza a correr el programa que estima la postura. Hay que tener en cuenta que esta ubicación inicial puede estar en cualquier punto de nuestro entorno y no siempre debe coincidir con un punto conocido.

La determinación de la postura del robot móvil para las variables de control dadas  $(x, y, \theta)$  se realiza utilizando las relaciones obtenidas en la ecuación (3.47) de cinemática directa:

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t v(t) \cos(\theta(t)) dt \\y(t) &= \int_0^t v(t) \sin(\theta(t)) dt \\ \theta(t) &= \int_0^t \omega(t) dt\end{aligned} \tag{3.55}$$

Puede ser deseable formar un modelo de tiempo discreto a partir de estas ecuaciones, esto sería útil para la simulación computacional en tiempo discreto, así como para otras aplicaciones. Claramente, estas ecuaciones no son lineales, por lo tanto, los métodos utilizados para convertir un sistema lineal de tiempo continuo en una representación de tiempo discreto no son

aplicables. Un enfoque es utilizar el método de integración de Euler, el cual es una aproximación de la integración de la serie de Taylor de primer orden.

Si se asumen velocidades constantes  $v$  y  $\omega$  durante el tiempo de muestreo, la integración de las ecuaciones anteriores se puede hacer numéricamente usando el método de Euler. La cinemática directa viene dada por:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) + v(k)T_s \cos(\theta(k)) \\y(k+1) &= y(k) + v(k)T_s \sin(\theta(k)) \\ \theta(k+1) &= \theta(k) + \omega(k)T_s\end{aligned}\tag{3.56}$$

Se asume que son conocidas, tanto la posición  $(x(k), y(k))$  y la orientación  $\theta(k)$  inicial del robot, así como el perfil de las velocidades (las velocidades de los motores desde el instante inicial al instante actual). Aquí, el intervalo de muestreo  $T_s$  debe elegirse lo suficientemente pequeño dependiendo de la dinámica de las ecuaciones diferenciales originales, es decir, el comportamiento del modelo de tiempo discreto debe coincidir con el del sistema original. Para un sistema lineal, esto corresponde a seleccionar el intervalo de muestreo para que sea aproximadamente una quinta parte de la constante de tiempo más pequeña del sistema o menos, dependiendo del grado de precisión requerido. Para sistemas no lineales, puede ser necesario determinar empíricamente este tamaño límite. Este modelo de tiempo discreto se puede utilizar para análisis, diseños de control, diseños de estimadores y simulaciones.

Si se utiliza la integración numérica trapezoidal, una mejor aproximación es obtenida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) + v(k)T_s \cos\left(\theta(k) + \frac{\omega(k)T_s}{2}\right) \\y(k+1) &= y(k) + v(k)T_s \sin\left(\theta(k) + \frac{\omega(k)T_s}{2}\right) \\ \theta(k+1) &= \theta(k) + \omega(k)T_s\end{aligned}\tag{3.57}$$

Si se aplica la integración exacta, la cinemática directa es

$$x(k+1) = x(k) + \frac{v(k)}{\omega(k)} (\sin(\theta(k) + \omega(k)T_s) - \sin(\theta(k)))\tag{3.58}$$

$$y(k+1) = y(k) - \frac{v(k)}{\omega(k)} (\cos(\theta(k) + \omega(k)T_s) - \cos(\theta(k)))$$

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \omega(k)T_s$$

donde la integración de la ecuación anterior se realiza dentro del intervalo de tiempo de muestreo y se supone que las velocidades constantes  $v$  y  $\omega$  obtienen incrementos:

$$\begin{aligned} \Delta x(k) &= v(k) \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \cos(\theta(t)) dt \\ &= v(k) \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \cos(\theta(k) + \omega(k)(t - kT_s)) dt \\ \Delta y(k) &= v(k) \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \sin(\theta(t)) dt \\ &= v(k) \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \sin(\theta(k) + \omega(k)(t - kT_s)) dt \end{aligned}$$

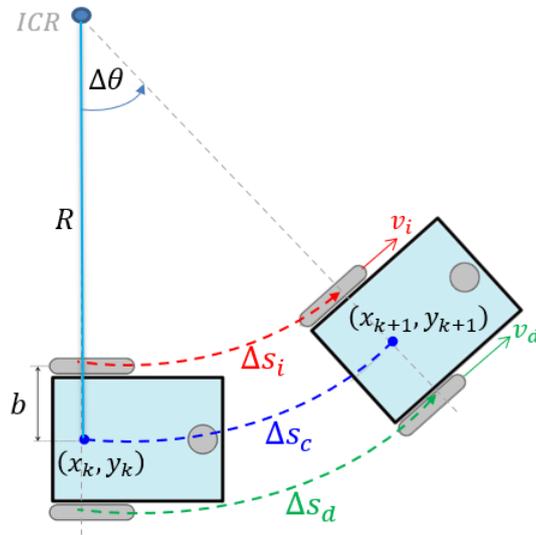
La ecuación (3.58) puede ser colocada en función de las velocidades lineales de las dos ruedas reemplazando en dicha ecuación las relaciones obtenidas en (3.51) y (3.52) en forma discreta:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + \frac{b(v_d + v_i)_k}{(v_d - v_i)_k} \left[ \sin\left(\theta(k) + \frac{(v_d - v_i)_k}{2b} T_s\right) - \sin(\theta(k)) \right] \\ y(k+1) &= y(k) - \frac{b(v_d + v_i)_k}{(v_d - v_i)_k} \left[ \cos\left(\theta(k) + \frac{(v_d - v_i)_k}{2b} T_s\right) - \cos(\theta(k)) \right] \\ \theta(k+1) &= \theta(k) + \frac{(v_d - v_i)_k}{2b} T_s \end{aligned} \quad (3.59)$$

También es posible expresar estas ecuaciones en función de las velocidades angulares de las dos ruedas ( $\dot{\varphi}_d$  y  $\dot{\varphi}_i$ ) reemplazando en la ecuación (3.58) las relaciones obtenidas en (3.53) y (3.54). Un programa informático en el controlador puede calcular fácilmente las expresiones anteriores.

Puesto que existen sensores que en la práctica proporcionan directamente los desplazamientos lineales de ambas ruedas ( $\Delta s_d$  y  $\Delta s_i$ ) en vez de las velocidades, resultaría más cómodo trabajar con las relaciones de las ecuaciones (3.56), (3.57), (3.58) y (3.59) expresadas en función de dichos desplazamientos, teniendo en cuenta que  $\Delta s_d = v_d(k)T_s$  y  $\Delta s_i = v_i(k)T_s$ . Supongamos que cada una de las ruedas tiene una velocidad angular y lineal constante durante el tiempo de

muestreo  $T_s$  como se muestra en la Figura 3.22 (a). Si la velocidad de la rueda derecha  $v_d$  fuera mayor a la de la rueda izquierda  $v_i$ , el robot se movería en una trayectoria curva hacia su izquierda y viceversa. Siendo las dos velocidades constantes, esa trayectoria correspondería a la trayectoria de una circunferencia con un radio de curvatura  $R$ . Es decir, de mantener este patrón de movimiento el robot describiría una circunferencia en torno al Centro Instantáneo de Rotación o CIR.



**Figura 3.22 (a).** Desplazamiento lineal de las ruedas y el centro del robot.

Por lo tanto, volviendo a los intervalos temporales de antes, la rueda izquierda ha descrito un arco de longitud  $s_i$  en el intervalo  $T_s$  con radio de curvatura de  $R - b$ . Mientras tanto, la rueda derecha ha descrito un arco de longitud  $s_d$  con un radio de  $R + b$ . Con esto, es fácil deducir cual es el incremento en orientación:

$$\frac{\Delta s_i}{R - b} = \Delta\theta \quad y \quad \frac{\Delta s_d}{R + b} = \Delta\theta$$

Se cuenta con dos ecuaciones y dos incógnitas ( $R$  y  $\Delta\theta$ ), con lo que resolviendo obtenemos que:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s_d - \Delta s_i}{2b} \quad y \quad R = \frac{b(\Delta s_d + \Delta s_i)}{\Delta s_d - \Delta s_i}$$

Con lo cual el incremento de orientación  $\Delta\theta$  ya lo hemos deducido. Ahora, para saber el desplazamiento lineal del centro del robot sólo tenemos que pensar que el centro ha descrito un arco de longitud  $\Delta s_c$  con radio de curvatura  $R$ . Aplicando la misma lógica de antes, sabemos que  $\Delta s_c/R = \Delta\theta$ . Manipulado esta expresión con las dos ecuaciones anteriores se tiene que:

$$\Delta s_c = \frac{\Delta s_d + \Delta s_i}{2}$$

Debido al hecho de que  $s_c$  corresponde al desplazamiento lineal del centro del robot, se cumple que  $\Delta s_c = v(k)T_s$ . Llegados a este punto donde sólo nos falta calcular las coordenadas de la posición  $x$  e  $y$ , y la orientación  $\theta$  del centro del robot en el instante  $k + 1$ , en función de los desplazamientos lineales  $\Delta s_c$ ,  $\Delta s_d$  y  $\Delta s_i$ . Para ello vamos a tomar como ejemplo las expresiones obtenidas en la ecuación (3.56) con lo cual se obtiene

$$x(k + 1) = x(k) + \Delta s_c \cos(\theta(k))$$

$$y(k + 1) = y(k) + \Delta s_c \sin(\theta(k))$$

$$\theta(k + 1) = \theta(k) + \Delta\theta$$

Estas expresiones se pueden colocar solo en función de los desplazamientos lineales de las dos ruedas ( $\Delta s_d$  y  $\Delta s_i$ ), obteniendo la expresión:

$$x(k + 1) = x(k) + \frac{\Delta s_d + \Delta s_i}{2} \cos(\theta(k))$$

$$y(k + 1) = y(k) + \frac{\Delta s_d + \Delta s_i}{2} \sin(\theta(k))$$

$$\theta(k + 1) = \theta(k) + \frac{\Delta s_d - \Delta s_i}{2b}$$

En la práctica existen ciertos robots móviles los cuales pueden leer directamente desde los encoders el desplazamiento o rotación angular de las ruedas en grados. Para estos robots sería recomendable expresar las ecuaciones anteriores en función de los desplazamientos angulares de las ruedas ( $\varphi_d$  y  $\varphi_i$ ), tomando en consideración la relación  $\Delta s = 2\pi r\varphi/360^\circ$  donde  $r$  corresponde al radio de las ruedas, aunque esta relación también es posible expresarla en función del diámetro  $d$  de las ruedas como  $\Delta s = \pi d\varphi/360^\circ$ . A partir de esta última igualdad podemos expresar las ecuaciones de postura como:

$$x(k + 1) = x(k) + \frac{\pi d}{360^\circ} \left( \frac{\varphi_d + \varphi_i}{2} \right) \cos(\theta(k))$$

$$y(k + 1) = y(k) + \frac{\pi d}{360^\circ} \left( \frac{\varphi_d + \varphi_i}{2} \right) \sin(\theta(k))$$

$$\theta(k + 1) = \theta(k) + \frac{\pi d}{360^\circ} \left( \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2b} \right)$$

El proceso iterativo de todas las ecuaciones vistas hasta el momento tiene un inconveniente: tenemos que saber el valor de la postura inicial  $(x(0), y(0), \theta(0))$ . Lo que se suele hacer en estos casos es suponer que las coordenadas al comienzo son  $(0,0,0)$ . Por ello, la estimación de la postura basada en odometría es relativa al punto de comienzo, tal y como hemos dicho al principio.

El desarrollo de la cinemática inversa es una tarea más desafiante que los casos anteriores de cinemática directa. Usamos cinemática inversa para determinar las variables de control para conducir el robot a la postura de robot deseada o trayectoria del camino. Los robots suelen estar sujetos a restricciones no holonómicas (analizadas con mayor detalle en la sección 3.3), lo que significa que no todas las direcciones de conducción son posibles. Ahí también hay muchas soluciones posibles para llegar a la postura deseada.

Si se estudia el comportamiento de las fórmulas anteriores en el caso particular en que las velocidades de ambos motores son idénticas  $v_d = v_i$  se observa una situación singular. En tal circunstancia, el programa informático de cómputo de las relaciones de la ecuación (3.59) produce un valor indeterminado. Una solución simple al problema de la indeterminación sería si se permite que el robot diferencial conduzca solo hacia adelante ( $v_d(t) = v_i(t) = V_d, \omega(t) = 0, v(t) = V_d$ ) o solo rotar en el lugar ( $v_d(t) = -v_i(t) = V_d, \omega(t) = V_d/b, v(t) = 0$ ) a velocidades constantes mientras se desplaza. Con este supuesto la ecuación de movimiento de rotación (3.55) se simplifica a:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \\ y(t) &= y(0) \\ \theta(t) &= \theta(0) + \frac{V_d \cdot t}{b} \end{aligned} \tag{3.60}$$

y para el movimiento recto, la ecuación (3.55) se simplifica a

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + V_d \cos(\theta(0))t \\ y(t) &= y(0) + V_d \sin(\theta(0))t \\ \theta(t) &= \theta(0) \end{aligned} \tag{3.61}$$

La estrategia de movimiento podría ser orientar al robot a la posición deseada por rotación y luego conducir al robot a la posición deseada mediante un movimiento recto y finalmente alinear (con rotación) la orientación del robot con la orientación deseada en la postura deseada. Las variables de control requeridas para cada fase (rotación, movimiento recto, rotación) se pueden calcular fácilmente a partir de las ecuaciones (3.60) y (3.61).

Si consideramos una notación de tiempo discreto donde las velocidades de control  $v_d(k)$  y  $v_i(k)$  son constantes durante el intervalo de tiempo  $T_s$  y los cambios de las velocidades de control solo son posibles en instantes de tiempo  $t = kT_s$ , entonces podemos escribir en forma discreta las ecuaciones para el movimiento del robot. Para el movimiento de rotación ( $v_d(k) = -v_i(k)$ ) se sigue

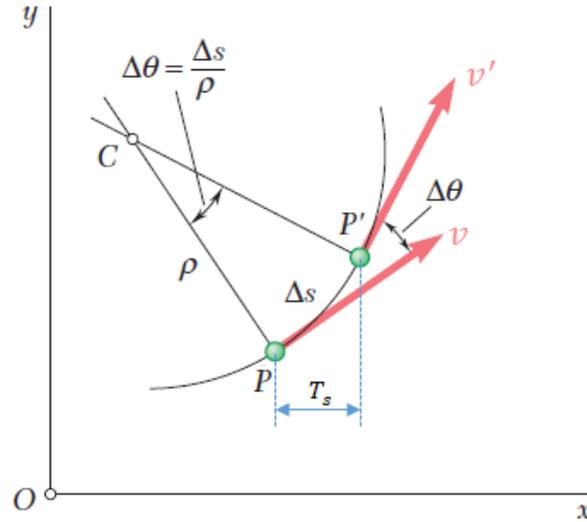
$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) \\y(k+1) &= y(k) \\ \theta(k+1) &= \theta(k) + \frac{v_d(k)T_s}{b}\end{aligned}\tag{3.62}$$

y la ecuación de movimiento recto ( $v_d(k) = v_i(k)$ ) es

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) + v_d(k)\cos(\theta(k))T_s \\y(k+1) &= y(k) + v_d(k)\sin(\theta(k))T_s \\ \theta(k+1) &= \theta(k)\end{aligned}\tag{3.63}$$

Entonces, para el movimiento deseado del robot dentro del intervalo de tiempo  $t \in [kT_s, (k+1)T_s)$ , la cinemática del robot se puede calcular para cada tiempo de muestreo expresando las variables de control de las ecuaciones (3.62) y (3.63).

Como ya se ha dicho, existen muchas otras soluciones para conducir el robot móvil a la postura deseada usando trayectorias cambiantes con giros suficientemente suaves (se entiende que el giro del robot no supere los  $10^\circ$  durante  $T_s$ ,  $\Delta\theta < 10^\circ$ ), como se muestra en la Figura 3.22 (b). El problema de la cinemática es más fácil para una trayectoria deseada suave ( $x(t)$ ,  $y(t)$ ) que el robot debe seguir de modo que su orientación sea siempre tangente a la trayectoria. La trayectoria se define en el intervalo de tiempo  $t \in [0, T]$ .



**Figura 3.22 (b).** Condiciones de giro suave para aplicación de simplificación numérica.

Suponiendo que la postura inicial del robot está sobre la trayectoria y hay un modelo cinemático perfecto y sin perturbaciones, podemos calcular las variables de control requeridas  $v$  de la siguiente manera:

$$v(t) = \pm \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \quad (3.64)$$

donde el signo depende de la dirección de conducción deseada (+ para adelante y - para marcha atrás). El ángulo tangente de cada punto de la ruta se define como

$$\theta(t) = \arctan2(\dot{y}(t), \dot{x}(t)) + l\pi \quad (3.65)$$

donde  $l \in \{0, 1\}$  define la dirección de conducción deseada (0 para avance y 1 para reversa) y la función  $\arctan2$  es la función tangente inversa de cuatro cuadrantes. Calculando la derivada temporal de la ecuación. (3.65) la velocidad angular  $\omega(t)$  del robot se obtiene:

$$\omega(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = v(t)\kappa(t) \quad (3.66)$$

donde  $\kappa(t)$  es el coeficiente instantáneo de curvatura ( $\kappa(t) = 1/R(t)$ ) de la trayectoria. Usando las relaciones (3.64), (3.66) y definida la trayectoria deseada del robot ( $x(t)$ ,  $y(t)$ ), las entradas de control del robot  $v(t)$  y  $\omega(t)$  pueden ser calculadas. La condición necesaria en el procedimiento de diseño de ruta es un camino dos veces diferenciable y una velocidad tangencial distinta de cero  $v(t) \neq 0$ . Si para algún instante de tiempo  $t$  la velocidad tangencial

es  $v(t) = 0$ , el robot gira sobre un punto fijo y con una velocidad angular  $\omega(t)$ . El ángulo  $\theta(t)$  no se puede determinar desde la ecuación (3.64) y, por lo tanto,  $\theta(t)$  debe darse explícitamente. Por lo general, este enfoque se utiliza para determinar la parte de avance del control complementario a la parte de realimentación que se ocupa del modelo cinemático imperfecto, las perturbaciones y el error de postura inicial.

Debido a las simplificaciones introducidas, la exactitud para la estimación de la postura del robot móvil está sujeta a que las hipótesis de trabajo sean válidas en todo instante. En la práctica es imposible evitar el deslizamiento de las ruedas del robot, produciéndose pequeños errores en las estimaciones calculadas. Puesto que se trata de un error acumulable en el tiempo, durante el desplazamiento prolongado del robot es preciso recalibrar su postura para reiniciar periódicamente el error de los cálculos.

### EJEMPLO 3.1

Usando Matlab, realice la simulación de la plataforma de transmisión diferencial utilizando las relaciones obtenidas en la ecuación (3.56) mediante el método de Euler. Los parámetros del vehículo son los siguientes: período de muestreo  $T_s = 0.1$  s, tiempo de simulación 20 s, radio de la rueda  $r = 0.04$  m, distancia entre las ruedas  $L = 2b = 0.08$  m.

Analice y muestre mediante simulación la forma de la trayectoria que realiza el robot si el estado inicial es  $\mathbf{q}(0) = [x \ y \ \theta]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  y las entradas del robot en tres casos diferentes son las siguientes:

$$v(t) = 0.5 \text{ m/s}, \omega(t) = 0 \text{ rad/s}$$

$$v(t) = 1 \text{ m/s}, \omega(t) = 0.5 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\phi}_i(t) = 17 \text{ rad/s} \text{ y } \dot{\phi}_d(t) = 16 \text{ rad/s}$$

#### Solución

A continuación, se proporciona un script básico de Matlab para la simulación del movimiento de robot móvil con configuración diferencial para el caso a, en donde se va a modificar varias líneas de código para obtener las soluciones deseadas de los incisos b y c.

Código:

```
%Limpieza de ventana de comando, borrado de variables
clc, clear all, close all

%Definición de los parámetros geométricos y de movimiento del robot
Ts=0.1;           %tiempo de muestreo a 0.1 segundos
t=0:Ts:20;       %intervalo de tiempo de toda la trayectoria
r=0.04;          %radio de las ruedas en m
b=0.04; L=2*b;   %distancia entre las ruedas en m
wi=17;           %velocidad angular de la rueda izquierda en rad/s
wd=16;           %velocidad angular de la rueda derecha en rad/s

%Especificación del valor de las velocidades del robot, se asumen constantes en toda la
trayectoria
v=0.5*ones(1,length(t)); %Velocidad lineal constante
w=0*ones(1,length(t));  %Velocidad angular constante
```

### EJEMPLO 3.1 – Continuación

```
%Definición del estado o postura inicial
xr(1)=0;
yr(1)=0;
phi(1)=0;
q=[xr(1);yr(1);phi(1)];

%Obtención de todas las posiciones y orientaciones del robot en el
%intervalo de tiempo T a pasos de tiempo de muestreo Ts, a partir de las
%relaciones obtenidas en la ecuación 2.56
for k=1:length(t)
    xr(k+1)=xr(k) + v(k)*Ts*cos(phi(k));
    yr(k+1)=yr(k) + v(k)*Ts*sin(phi(k));
    phi(k+1)=phi(k) + w(k)*Ts;
    q(:, :, k+1)=[xr(k+1);yr(k+1);phi(k+1)] %postura actual
end

%Parámetros para la ventana de visualización
pasos=20; fig=figure;
set(fig,'position',[10 60 980 600]);
axis square; cameratoolbar
axis([1 12 -4 4 0 1]); grid on
title('Trayectoria con v=0.5 m/s y w=0 rad/s')
xlabel('Desplazamiento en X')
ylabel('Desplazamiento en Y')
MobileRobot; %Programa auxiliar para definir la forma
%del robot, ver Anexo A para más detalle
M1=MobilePlot(xr(1),yr(1),phi(1)); %Función para graficar el robot y su
%correspondiente postura, ver Anexo A
hold on, plot(xr,yr); %Grafica la trayectoria generada

for i=1:pasos:length(t) %Actualiza la postura del robot sobre la gráfica
%de visualización cada n pasos
    delete (M1)
    M1=MobilePlot(xr(i),yr(i),phi(i)); hold on
    pause(0.5)
end
```

**a)** Para este caso se ha obtenido una línea recta como trayectoria con dirección positiva hacia al eje  $x$  (Figura 3.23), y esto es evidente puesto que la velocidad angular del robot es cero en todo el intervalo de tiempo de la simulación lo que indica que no hay cambio de orientación.

**b)** Para este caso se ha obtenido una circunferencia de radio  $R = v/\omega = 1/0.5 = 2 \text{ m}$  como trayectoria con dirección positiva antihoraria (Figura 3.24). Se han modificado las siguientes líneas de código en Matlab para la simulación y obtención de la trayectoria:

```
v=1*ones(1,length(t)); %Velocidad lineal constante
w=0.5*ones(1,length(t)); %Velocidad angular constante
axis([-4 4 -1 5 0 1]); grid on
title('Trayectoria con v=1 m/s y w=0.5 rad/s')
```

**c)** Para este caso se ha obtenido una circunferencia de radio  $R = v/\omega = b(\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_i)/(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}_i) = 0.04(16 + 17)/(16 - 17) = -1.32$  como trayectoria con dirección positiva horaria (Figura 3.25). Se han modificado las siguientes líneas de código en Matlab para la simulación y obtención de la trayectoria:

```
v=(r/2)*(wd+wi)*ones(1,length(t));
w=(r/L)*(wd-wi)*ones(1,length(t));
axis([-4 4 -4 1 0 1]); grid on
title('Trayectoria con wi=17 rad/s y wd=16 rad/s')
```

### EJEMPLO 3.1 - Continuación

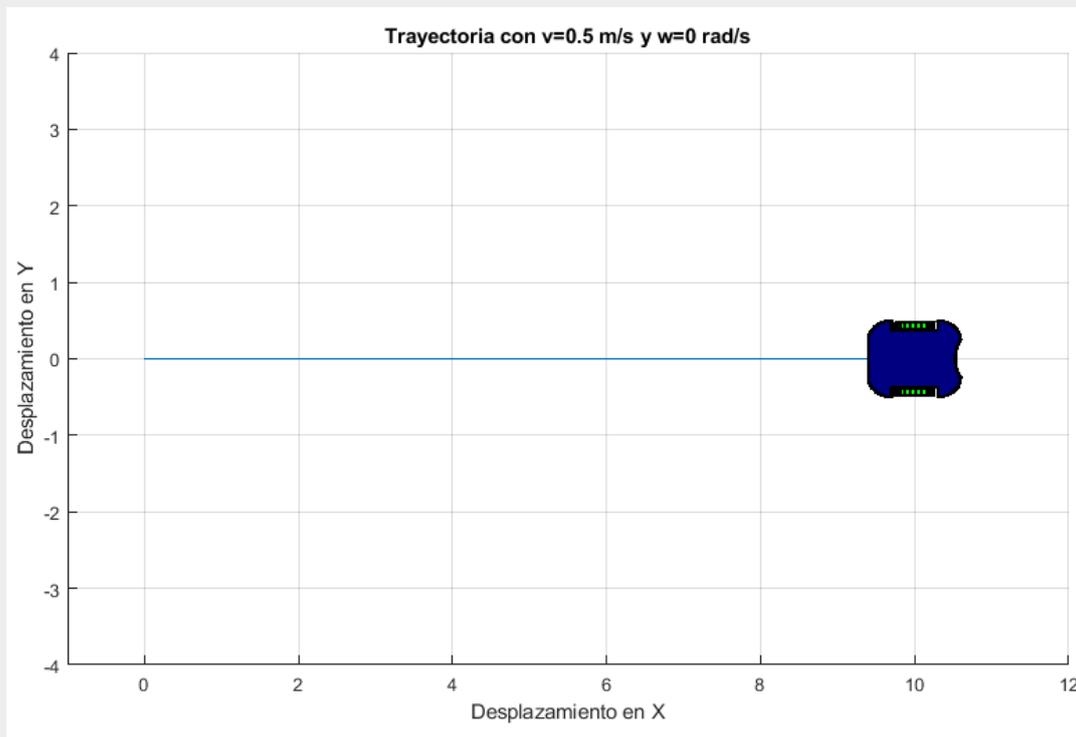


Figura 3.23. Trayectoria generada por el robot con  $v = 0.5$  m/s y  $\omega = 0$  rad/s

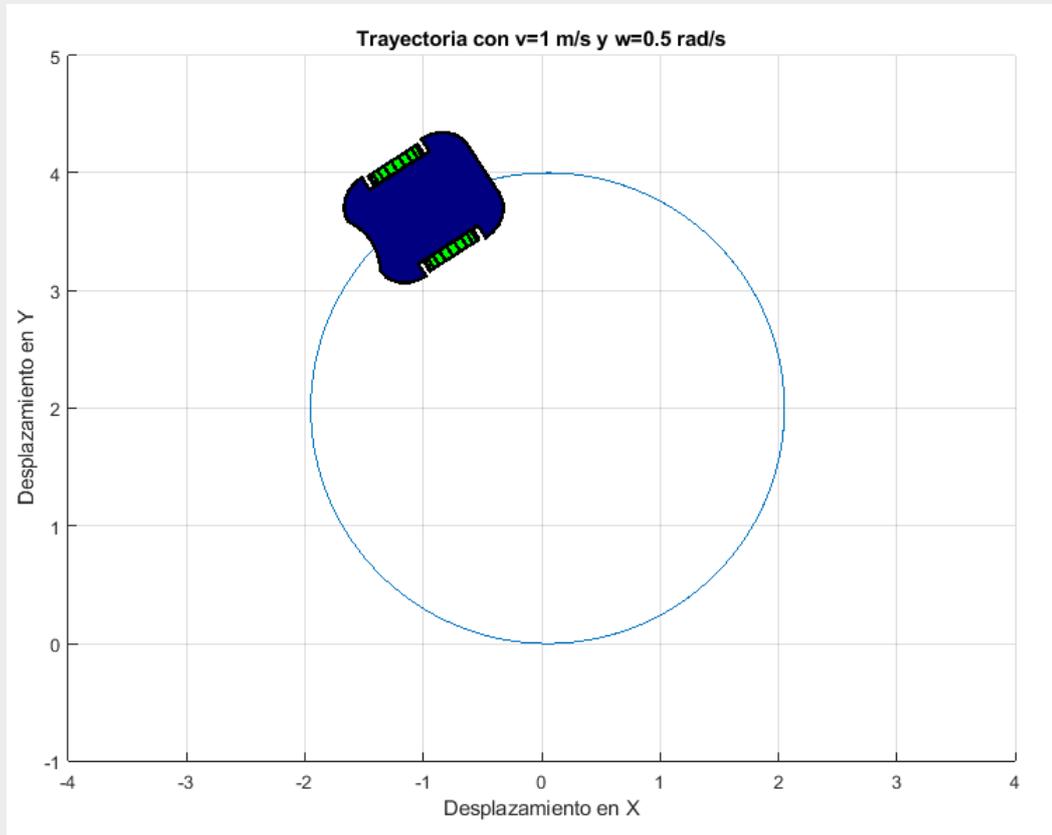


Figura 3.24. Trayectoria generada por el robot con  $v = 1$  m/s y  $\omega = 0.5$  rad/s

### EJEMPLO 3.1 – Continuación

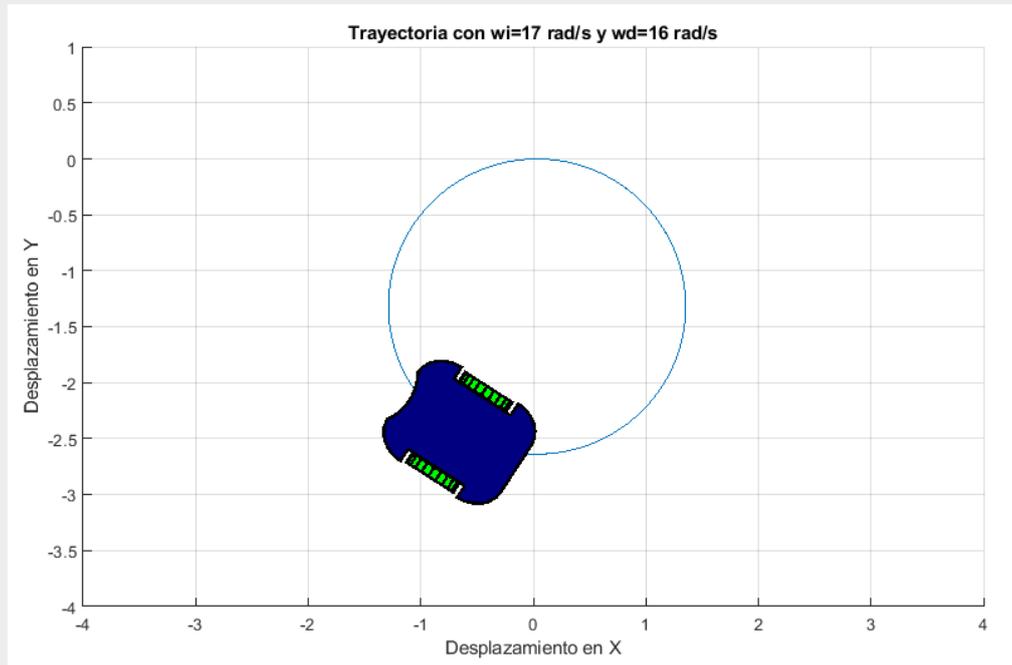


Figura 3.25. Trayectoria generada por el robot con  $\dot{\varphi}_i = 17 \text{ rad/s}$  y  $\dot{\varphi}_d = 16 \text{ rad/s}$

### 3.2.6 Modelo Cinemático del Robot Bicicleta

El robot con configuración bicicleta que se muestra en la Figura 3.26 tiene una rueda orientable centrada activa donde  $\beta(t)$  es el ángulo de dirección y  $\dot{\varphi}_s$  es la velocidad angular de la rueda alrededor de su eje de rotación, la rueda trasera es una rueda fija pasiva. Las ruedas del robot tienen radio  $r$  y la distancia entre los centros de rotación de las mismas es  $d$ .

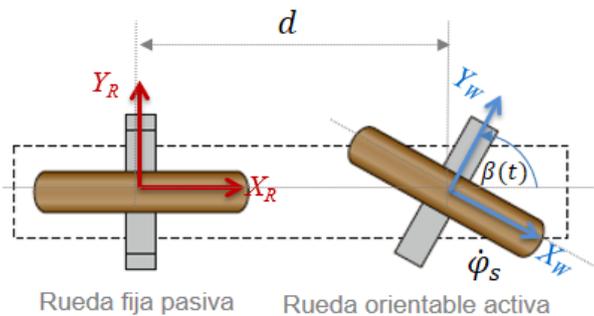


Figura 3.26. Geometría de un robot tipo bicicleta con tracción y dirección delantera.

### 3.2.6.1 Análisis mediante las Ecuaciones de Restricción de las Ruedas

Primero, partimos de las ecuaciones (3.9) y (3.10) de restricción de las ruedas convencionales orientables centradas deducidas en la sección 3.2.3.2. Estas ecuaciones relacionan el movimiento del robot con las restricciones de rodamiento y deslizamiento y deben ser aplicadas a las dos ruedas del robot. En el caso de la rueda delantera orientable activa se debe utilizar las dos ecuaciones de restricción, mientras que para la rueda trasera fija pasiva se debe emplear solo la restricción de deslizamiento puesto que su eje de apoyo es fijo y su velocidad de movimiento respecto al eje giro es una variable incontrolable.

Según la ubicación de los sistemas de referencia del robot y de las ruedas sobre el chasis mostrado en la Figura 3.26, se observa que para la rueda orientable delantera  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta'(t) = 90^\circ + \beta(t)$  y  $l = d$ , en cambio para la rueda fija pasiva se tiene que los valores de las de las variables serían  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  y  $l = 0$ .

Restricciones de rodadura y deslizamiento para la rueda delantera orientable activa:

$$\begin{bmatrix} \sin(90^\circ + \beta(t)) & -\cos(90^\circ + \beta(t)) & -d \cos(90^\circ + \beta(t)) \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = r \dot{\phi}_s$$

$$\begin{bmatrix} \cos(90^\circ + \beta(t)) & \sin(90^\circ + \beta(t)) & d \sin(90^\circ + \beta(t)) \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = 0$$

Restricción de deslizamiento para la rueda trasera fija pasiva:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = 0$$

A partir de estas ecuaciones matriciales construiremos las matrices  $J_1(\beta_s)$ ,  $C_1^*(\beta_s)$  y  $J_2$ , empleando  $\beta$  en lugar de  $\beta(t)$  con la finalidad de ahorrar espacio en las formulaciones:

$$J_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} \sin(90^\circ + \beta) & -\cos(90^\circ + \beta) & -d \cos(90^\circ + \beta) \end{bmatrix}$$

$$C_1^*(\beta_s) = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ + \beta) & \sin(90^\circ + \beta) & d \sin(90^\circ + \beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = [r]$$

La fusión de estas tres matrices da como resultado la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} J_1(\beta_s) \\ C_1^*(\beta_s) \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = \begin{bmatrix} J_2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

$$\begin{bmatrix} \sin(90^\circ + \beta) & -\cos(90^\circ + \beta) & -d \cos(90^\circ + \beta) \\ \cos(90^\circ + \beta) & \sin(90^\circ + \beta) & d \sin(90^\circ + \beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & d \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & d \cos(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

A partir de la expresión anterior se determina la matriz jacobiana, la cual permite obtener la expresión de la cinemática directa de este robot, conociendo que  $m = n$  en la matriz  $\mathbf{B}$  se obtiene:

$$\mathbf{J} = \mathbf{B}^+ \mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sin(\beta)}{d} & \frac{\cos(\beta)}{d} & -\frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\beta) \\ 0 \\ \frac{r}{d} \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

$${}^R \dot{\xi} = \mathbf{J} \dot{\phi}$$

$${}^R \dot{\xi} = \begin{bmatrix} r \cos(\beta) \\ 0 \\ \frac{r}{d} \sin(\beta) \end{bmatrix} \dot{\phi} \quad \begin{bmatrix} {}^R \dot{x} \\ {}^R \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\beta) \\ 0 \\ \frac{r}{d} \sin(\beta) \end{bmatrix} \dot{\phi}_s \quad \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\beta) \\ \frac{r}{d} \sin(\beta) \end{bmatrix} \dot{\phi}_s \quad (3.67)$$

Por lo tanto, la expresión para la velocidad lineal y angular del robot en función de la velocidad de las ruedas con respecto a su sistema de referencia local quedaría:

$${}^R \dot{x} = v = r \cdot \cos(\beta) \cdot \dot{\phi}_s \quad \dot{\theta} = \omega = \frac{r}{d} \sin(\beta) \cdot \dot{\phi}_s \quad (3.68)$$

La cinemática directa en el sistema inercial sería:

$${}^I \dot{\xi} = {}^I \mathbf{R}_R {}^R \dot{\xi} = ({}^R \mathbf{R}_I)^{-1} {}^R \dot{\xi}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\theta \\ v \sin\theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos\beta \\ \frac{r}{d} \sin\beta \end{bmatrix} \dot{\phi}_s = \begin{bmatrix} r \cos\beta \cos\theta \\ r \cos\beta \sin\theta \\ \frac{r}{d} \sin\beta \end{bmatrix} \dot{\phi}_s \quad (3.69)$$

Las velocidades respecto al sistema inercial y en función de las velocidades lineales y angulares locales del robot quedan:

$$\dot{x} = v \cos\theta \quad \dot{y} = v \sin\theta \quad \dot{\theta} = \omega \quad (3.70)$$

$$\dot{x} = r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta \cdot \dot{\phi}_s \quad \dot{y} = r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \cdot \dot{\phi}_s \quad \dot{\theta} = \frac{r}{d} \sin\beta \cdot \dot{\phi}_s \quad (3.71)$$

La matriz jacobiana inversa  $J^{-1}$  puede ser obtenida a partir de la expresión  $J^{-1} = \mathbf{D}^+ \mathbf{B} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{B}$ :

$$J^{-1} = \frac{1}{r} [\cos(\beta) \quad \sin(\beta) \quad d \sin(\beta)]$$

La representación matricial de la cinemática inversa diferencial respecto al sistema de referencia local del robot es:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = J^{-1} {}^R \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\dot{\phi}_s = \frac{1}{r} [\cos(\beta) \quad \sin(\beta) \quad d \sin(\beta)] \begin{bmatrix} {}^R \dot{x} \\ {}^R \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

En ciertos análisis por diferentes autores suelen incluir la velocidad de dirección  $\dot{\beta}$  como una variable de control de la cinemática directa y la introducen dentro del vector  ${}^I \dot{\boldsymbol{\xi}}$  como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta \\ r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \\ \frac{r}{d} \sin\beta \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}_s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\beta} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta & 0 \\ r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta & 0 \\ \frac{r}{d} \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_s \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

De forma general, este tipo de representación se puede considerar como una representación del *espacio de estados* del robot, denominada *modelo cinemático de la postura*, con las coordenadas de la postura  ${}^I \boldsymbol{\xi}$  y (posiblemente) las coordenadas de la orientación  $\beta$  como *variables de estado* mientras que  $\dot{\phi}_s$  y  $\dot{\beta}$ , se pueden interpretar como *variables de entrada de control* que ingresan al modelo linealmente. En la Figura 3.27 se presenta el código desarrollado

en Matlab para determinar la cinemática directa e inversa de un robot bicicleta partiendo de las ecuaciones encontradas en esta sección.

```

%Creación de variables simbólicas
syms r d beta theta

%Definición de las matrices B y D
B=[sin(pi/2+beta) -cos(pi/2+beta) -d*cos(pi/2+beta);cos(pi/2+beta)
sin(pi/2+beta) d*sin(pi/2+beta);0 1 0]

B=simplify(B)
D=[r; 0; 0]

%Cáculo de la cinemática directa respecto al sistema local
invB=simplify(inv(B))
J=simplify(invB*D) %matriz Jacobiana

%Cáculo de la cinemática directa respecto al sistema global
R=[cos(theta) -sin(theta) 0;sin(theta) cos(theta) 0;0 0 1]
Jglobal=R*J

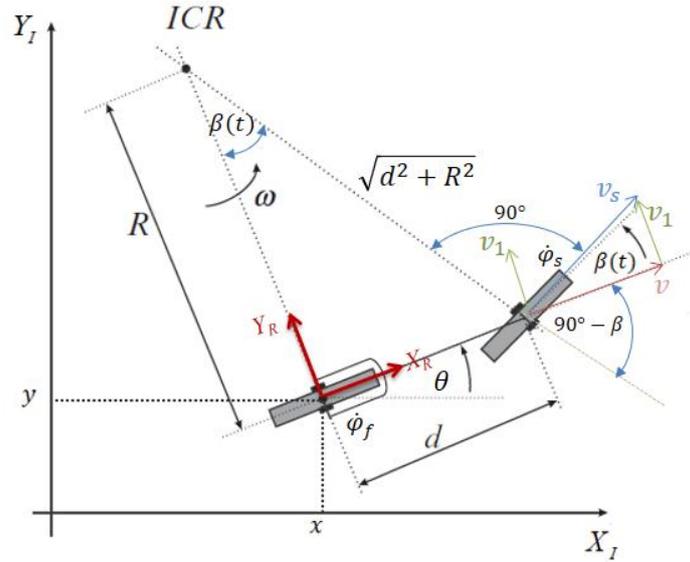
%Cáculo de la cinemática inversa respecto al sistema local
invD=simplify(inv(D'*D)*D')
invJ=invD*B %matriz Jacobiana inversa

```

**Figura 3.27.** Código en Matlab para determinar la cinemática directa e inversa de un robot bicicleta con tracción delantera.

### 3.2.6.2 Análisis mediante el Centro Instantáneo de Rotación

De acuerdo con la Figura 3.28, el punto ICR está definido por la intersección de ambos ejes de las ruedas. En cada momento, el robot tipo bicicleta gira alrededor del ICR con velocidad angular  $\omega$ , un radio  $R$  y una distancia entre las ruedas  $d$ . De la Figura 3.28 se debe indicar el significado de varios términos:  $v_s$  es la velocidad lineal de la rueda orientable ( $v_s = r\dot{\phi}_s$ );  $v$  es la velocidad tangencial de cualquier punto del robot con respecto al ICR ( $v = R\omega$ ) y  $v_1$  es la velocidad tangencial de la rueda orientable respecto al origen del sistema de referencia del robot ( $v_1 = r\dot{\theta}$ ); estas tres velocidades son representadas de forma vectorial en un mismo origen colocado sobre la rueda orientable.



**Figura 3.28.** Geometría de un robot tipo bicicleta con representación del ICR.

Analizando el triángulo rectángulo formado por el ICR y las dos ruedas se obtiene que:

$$\tan(\beta(t)) = \frac{d}{R} \quad R(t) = \frac{d}{\tan(\beta(t))} \quad \sin(\beta(t)) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}$$

La rueda orientable gira alrededor de ICR con una velocidad angular  $\omega$  y a una distancia  $\sqrt{d^2 + R^2}$ , así podemos escribir:

$$v_s = \sqrt{d^2 + R^2} \omega \quad \omega = \dot{\theta} = \frac{v_s}{\sqrt{d^2 + R^2}} \quad (3.74)$$

Considerando que  $\sqrt{d^2 + R^2} = d/\sin(\beta(t))$  y  $v_s = r\dot{\phi}_s$ , entonces la ecuación 3.74 se puede reescribir como:

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{r}{d} \sin(\beta(t)) \dot{\phi}_s \quad (3.75)$$

Analizando el triángulo rectángulo formado por las tres velocidades vectoriales  $v_s$ ,  $v$  y  $v_1$  se tiene que  $\cos(\beta(t)) = v/v_s$  y sabiendo que  $v_s = r\dot{\phi}_s$ , entonces se tiene que:

$$v = \dot{x}_R = r \cos(\beta(t)) \dot{\phi}_s \quad (3.76)$$

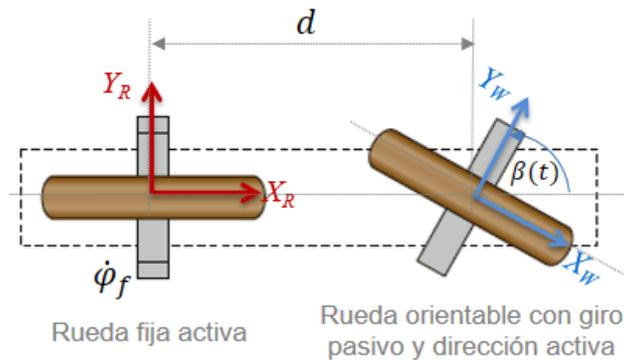
Por lo tanto, la cinemática directa del robot (3.75) y (3.76) en forma matricial respecto a su sistema de referencia local es:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\beta) \\ \frac{r}{d} \sin(\beta) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_s$$

Que corresponde a la misma expresión obtenida en (3.67) mediante las ecuaciones de restricción de rodadura y deslizamiento de la rueda orientable. El resto de las ecuaciones, incluyendo las de la cinemática inversa se obtienen de la misma manera como se analizó en la sección anterior.

### 3.2.6.3 Robot Bicicleta con Tracción de la Rueda Trasera

Por lo general, los vehículos se impulsan con las ruedas traseras y se dirigen con las ruedas delanteras (por ejemplo, bicicletas, triciclos y algunos automóviles), como se muestra en la Figura 3.29. Las variables de control en este caso son la velocidad angular de la rueda fija trasera  $\dot{\varphi}_f$  y el ángulo de dirección de la rueda delantera  $\beta(t)$ .



**Figura 3.29.** Geometría de un robot tipo bicicleta con accionamiento de la rueda trasera.

#### Análisis mediante las Ecuaciones de Restricción de las Ruedas

Para la rueda fija trasera activa los valores de los diferentes parámetros que determinan su cinemática son:  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  y  $l = 0$ . Reemplazando estos parámetros en las ecuaciones (3.6) y (3.7) de restricción de rodadura y deslizamiento para esta rueda se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = r \dot{\varphi}_f$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = 0$$

La rueda orientable delantera solo es utilizada para el direccionamiento del robot puesto que el movimiento es generado por el motor acoplado en la rueda trasera fija, es decir, que la velocidad angular  $\dot{\varphi}_s$  de la rueda orientable no se considera como una variable controlada. Debido a que no se está considerando en el análisis el control de la velocidad del giro  $\dot{\varphi}_s$  sobre el eje de la rueda paralelo al plano, solo se toma en cuenta la restricción de deslizamiento y no la de rodadura. Como se observa en la Figura 3.29 para la rueda orientable delantera  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta'(t) = 90^\circ + \beta(t)$  y  $l = d$ , con lo que la ecuación de deslizamiento quedaría representada como:

$$\begin{bmatrix} \cos(90^\circ + \beta(t)) & \sin(90^\circ + \beta(t)) & d \sin(90^\circ + \beta(t)) \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & d \cos(\beta(t)) \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = 0$$

La fusión de estas tres ecuaciones matriciales de restricción da como resultado la siguiente expresión, empleando  $\beta$  en lugar de  $\beta(t)$  con la finalidad de ahorrar espacio en las formulaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & d \cos(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_f$$

A partir de la expresión anterior se determina la matriz jacobiana, la cual permite obtener la expresión cinemática diferencial directa de este robot:

$$\mathbf{J} = \mathbf{B}^+ \mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sin\beta}{d \cdot \cos\beta} & \frac{1}{d \cdot \cos\beta} & -\frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \frac{r \cdot \sin\beta}{d \cdot \cos\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix}$$

$${}^R \dot{\xi} = \mathbf{J} \dot{\varphi}$$

$${}^R \dot{\xi} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix} \dot{\varphi} \quad \begin{bmatrix} {}^R \dot{x} \\ {}^R \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix} \dot{\varphi}_f \quad \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix} \dot{\varphi}_f \quad (3.77)$$

Por lo tanto, la expresión para la velocidad lineal y angular del robot en función de la velocidad de las ruedas con respecto a su sistema de referencia local sería:

$${}^R \dot{x} = v = r \cdot \dot{\varphi}_f \quad {}^R \dot{y} = 0 \quad \dot{\theta} = \omega = \frac{r}{d} \tan\beta \cdot \dot{\varphi}_f \quad (3.78)$$

La cinemática directa respecto al sistema inercial quedaría:

$${}^I \dot{\xi} = {}^I \mathbf{R}_R {}^R \dot{\xi} = ({}^R \mathbf{R}_I)^{-1} {}^R \dot{\xi}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix} \dot{\phi}_f = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta \\ r \cdot \sin\theta \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix} \dot{\phi}_f \quad (3.79)$$

Las velocidades respecto al sistema inercial y en función de las velocidades lineales y angulares locales del robot quedan:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos\theta & \dot{y} &= v \sin\theta & \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{x} &= r \cdot \cos\theta \cdot \dot{\phi}_f & \dot{y} &= r \cdot \sin\theta \cdot \dot{\phi}_f & \dot{\theta} &= \frac{r}{d} \tan\beta \cdot \dot{\phi}_f \end{aligned} \quad (3.80)$$

Esta forma de las ecuaciones es bastante simple, sin embargo, debe tenerse en cuenta que estas ecuaciones no son lineales.

Como se mencionó en la sección 3.2.6.1 ciertos autores saben incluir la velocidad de dirección  $\dot{\beta}$  como variable control dentro de la representación matricial, así la cinemática directa respecto al sistema de referencia global quedaría:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta \\ r \cdot \sin\theta \\ \frac{r}{d} \tan\beta \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}_f + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\beta} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta & 0 \\ r \cdot \sin\theta & 0 \\ \frac{r}{d} \tan\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_f \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

La matriz jacobiana inversa puede ser obtenida a partir de la expresión  $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{D}^+ \mathbf{B} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{B}$ :

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & d \cos(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La representación matricial de la cinemática inversa diferencial respecto al sistema de referencia local del robot es:

$$\dot{\phi} = \mathbf{J}^{-1} {}^R \dot{\xi}$$

$$\dot{\phi}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R\dot{x} \\ {}^R\dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{\phi}_f = \frac{1}{r} {}^R\dot{x} \quad (3.82)$$

En la Figura 3.30 se presenta el código desarrollado en Matlab para determinar la cinemática directa e inversa de un robot bicicleta con tracción trasera partiendo de las ecuaciones encontradas en esta sección.

```
%Creación de variables simbólicas
syms r d beta theta
%Definición de la matrices B y D
B=[1 0 0; -sin(beta) cos(beta) d*cos(beta); 0 1 0]
D=[r; 0; 0]
%Cálculo de la cinemática directa respecto al sistema local
invB=simplify(inv(B'*B)*B')
J=invB*D %matriz Jacobiana
%Cálculo de la cinemática directa respecto al sistema global
R=[cos(theta) -sin(theta) 0; sin(theta) cos(theta) 0; 0 0 1]
Jglobal=R*J
%Cálculo de la cinemática inversa respecto al sistema local
invD=simplify(inv(D'*D)*D')
invJ=invD*B %matriz Jacobiana inversa
```

**Figura 3.30.** Código en Matlab para determinar la cinemática directa e inversa de un robot bicicleta con tracción trasera.

### Análisis mediante el Centro Instantáneo de Rotación

El modelo cinemático respecto al sistema de referencia local del robot simplemente se puede derivar de las ecuaciones (3.75) y (3.76) donde la sustitución de la velocidad lineal de la rueda fija trasera  $v_f = v = r \cos(\beta(t))\dot{\phi}_s$  y  $v_f = r\dot{\phi}_f$  conduce a lo siguiente:

$$v = {}^R\dot{x} = r\dot{\phi}_f \quad {}^R\dot{y} = 0$$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{r}{d} \sin(\beta(t)) \frac{v_f}{r \cdot \cos(\beta(t))} = \frac{r}{d} \tan(\beta(t)) \dot{\phi}_f$$

Expresado en forma matricial la cinemática directa quedaría:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R\dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \frac{r}{d} \tan(\beta(t)) \end{bmatrix} \dot{\phi}_f$$

Que corresponde a la misma expresión obtenida en (3.77) mediante las ecuaciones de restricción de rodadura y deslizamiento sobre la rueda fija activa y la rueda orientable. El resto de las ecuaciones, incluyendo las de la cinemática inversa se obtienen de la misma manera como se analizó en la sección anterior.

### 3.2.6.4 Estimación de la Postura mediante Odometría

Considerando la ecuación (3.71), la cinemática directa del robot tipo bicicleta (rueda delantera para tracción y direccionamiento) se obtiene por medio de la ecuación (3.55) de forma similar a como en el caso del robot con accionamiento diferencial. La cinemática inversa es, en general, muy difícil de resolver a menos que un caso especial de estrategia de movimiento con dos patrones de movimiento se aplique de la siguiente manera. Con el primer patrón de movimiento, el robot solo puede avanzar en línea recta ( $\beta(t) = 0$ ) y por el segundo patrón de movimiento el robot puede rotar en un punto ( $\beta(t) = \pm \pi/2$ ). Para el movimiento recto del robot, las velocidades se simplifican a  $v(t) = v_s(t)$  y  $\omega(t) = 0$ . Al insertar estas velocidades en la ecuación (3.71) y discretizándola, las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) + v_s(k)\cos(\theta(k))T_s \\y(k+1) &= y(k) + v_s(k)\sin(\theta(k))T_s \\ \theta(k+1) &= \theta(k)\end{aligned}\tag{3.83}$$

Para la rotación del robot sobre un punto, las velocidades se simplifican a  $v(t) = 0$  y  $\omega(t) = v_s(t)/d$ . Después de insertar estas velocidades en la ecuación (3.71) y discretizándola, el modelo de movimiento viene dado por

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) \\y(k+1) &= y(k) \\ \theta(k+1) &= \theta(k) + \frac{v_s(k)}{d}T_s\end{aligned}\tag{3.84}$$

Las variables de control se pueden expresar a partir de las ecuaciones (3.83) y (3.84) para el movimiento requerido durante cada tiempo de muestreo.

### 3.2.7 Modelo Cinemático del Robot Triciclo

Si se observa la geometría del robot tipo triciclo mostrado en la Figura 3.31, podrían encontrarse algunas similitudes con el robot tipo bicicleta, con la única diferencia que se cuenta con dos ruedas fijas traseras ya sea en su configuración activa o pasiva y en ambos casos se encuentran unidas por el mismo eje y giran a la misma velocidad, por lo que, se podría considerar en el análisis cinemático que se trata de una única rueda fija. Se va a demostrar que las ecuaciones cinemáticas para este tipo de configuración son las mismas que se obtuvieron para el robot tipo bicicleta.

#### 3.2.7.1 Análisis mediante las Ecuaciones de Restricción de las Ruedas

Según se observa en la Figura 3.31 el robot tipo triciclo cuenta con tres ruedas, dos de ellas fijas y unidas por el mismo eje y una tercera rueda orientable centrada. Se va a realizar el análisis para las dos posibles configuraciones de las ruedas en este tipo de robot.

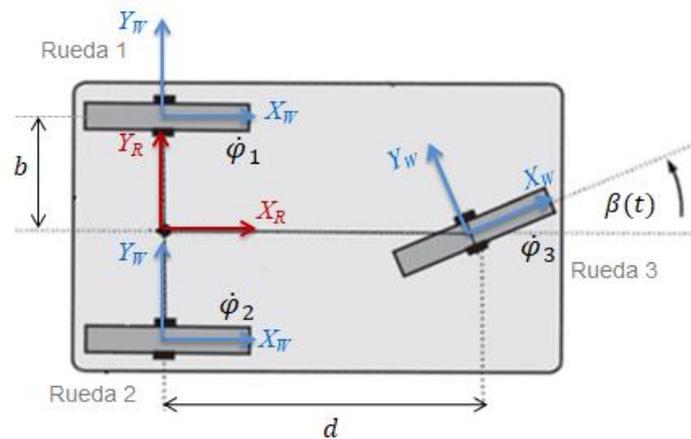


Figura 3.31. Geometría de un robot tipo triciclo.

#### Rueda Orientable Totalmente Motorizada y Ruedas Fijas Pasivas

Para esta configuración las velocidades angulares de las dos ruedas fijas son iguales y se consideran variables incontrolables puesto que giran libremente, por tanto,  $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2$ . Debido a esto la cinemática del robot solo se centra en la rueda orientable centrada y se considera la

aplicación del mismo análisis realizado en la sección 3.2.6.1 para la configuración tipo bicicleta, ya que, el sistema de referencia del robot se ubica en la misma ubicación. Si se toma en cuenta que  $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_s$ , el modelo cinemático directo de esta configuración respecto al sistema de referencia inercial sería:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos\beta \\ r \\ \frac{r}{d} \sin\beta \end{bmatrix} \dot{\varphi}_s = \begin{bmatrix} r \cos\beta \cos\theta \\ r \cos\beta \sin\theta \\ \frac{r}{d} \sin\beta \end{bmatrix} \dot{\varphi}_s \quad (3.85)$$

Las velocidades respecto al sistema inercial y en función de las velocidades lineales y angulares locales del robot quedan:

$$\dot{x} = v \cos\theta \quad \dot{y} = v \sin\theta \quad \dot{\theta} = \omega \quad (3.86)$$

$$\dot{x} = r \cos\beta \cos\theta \dot{\varphi}_s \quad \dot{y} = r \cos\beta \sin\theta \dot{\varphi}_s \quad \dot{\theta} = \frac{r}{d} \sin\beta \dot{\varphi}_s \quad (3.87)$$

La representación matricial de la cinemática inversa diferencial respecto al sistema de referencia local del robot es:

$$\dot{\varphi}_s = \frac{1}{r} [\cos(\beta) \quad \sin(\beta) \quad d \sin(\beta)] \begin{bmatrix} {}^R \dot{x} \\ {}^R \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Y la representación incluyendo a la velocidad angular de dirección  $\dot{\beta}$  quedaría representada como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos\beta \cos\theta \\ r \cos\beta \sin\theta \\ \frac{r}{d} \sin\beta \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\beta} = \begin{bmatrix} r \cos\beta \cos\theta & 0 \\ r \cos\beta \sin\theta & 0 \\ \frac{r}{d} \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_s \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

### Rueda Orientable Parcialmente Motorizada y Ruedas Fijas Activas

En esta configuración las dos ruedas fijas traseras son impulsadas por un motor acoplado a un mismo eje, con lo cual las velocidades angulares de las dos ruedas son iguales y ahora si se consideran variables controlables, por tanto,  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_f$ . La rueda orientable centrada solo

cuenta con un motor que controla la dirección del robot y la velocidad angular respecto al eje paralelo al plano de la rueda se considera incontrolable, lo que corresponde a decir que  $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_s = 0$ , además hay que considerar que para el caso de esta rueda solo se toma en cuenta la restricción de deslizamiento por los motivos analizados en la sección 3.2.6.3 para el robot tipo bicicleta.

Para la rueda 1, los parámetros geométricos son  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  y  $l = b$ ; para la rueda 2 se tiene que  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  y  $l = -b$ ; y para la rueda 3 estos parámetros son  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta'(t) = 90^\circ + \beta(t)$  y  $l = d$ . Bajo estas consideraciones y conociendo los parámetros geométricos del robot las restricciones de las tres ruedas pueden ser determinadas.

Restricciones de rodadura y deslizamiento para la rueda 1:

$$[1 \quad 0 \quad -b]^R \dot{\xi} = r \dot{\varphi}_f$$

$$[0 \quad 1 \quad 0]^R \dot{\xi} = 0$$

Restricciones de rodadura y deslizamiento para la rueda 2:

$$[1 \quad 0 \quad b]^R \dot{\xi} = r \dot{\varphi}_f$$

$$[0 \quad 1 \quad 0]^R \dot{\xi} = 0$$

Restricciones de rodadura para la rueda 3:

$$[\cos(90^\circ + \beta(t)) \quad \sin(90^\circ + \beta(t)) \quad d \sin(90^\circ + \beta(t))]^R \dot{\xi} = 0$$

$$[-\sin(\beta(t)) \quad \cos(\beta(t)) \quad d \cos(\beta(t))]^R \dot{\xi} = 0$$

Las cuatro ecuaciones de restricción para las dos ruedas fijas traseras pueden ser unificadas y simplificadas en dos de ellas, lo cual significa que estas dos ruedas pueden verse como una única rueda fija con su origen de referencia local coincidente con el origen del sistema de referencia del robot ( $b = 0$ ). Unificando las dos ecuaciones de rodadura y conservando la ecuación de deslizamiento para las dos ruedas traseras fijas se obtiene:

$$[1 \quad 0 \quad 0]^R \dot{\xi} = r \dot{\varphi}_f$$

$$[0 \quad 1 \quad 0]^R \dot{\xi} = 0$$

La fusión de estas tres ecuaciones matriciales de restricción da como resultado la siguiente expresión, empleando  $\beta$  en lugar de  $\beta(t)$  con la finalidad de ahorrar espacio en las formulaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & d \cos(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} {}^R \dot{\xi} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}_f$$

Esta última expresión corresponde a la misma que se obtuvo en la sección 3.2.6.3 para el caso del robot tipo bicicleta accionado mediante su rueda fija trasera, por dicha razón no va hacer necesario realizar el análisis completo para esta configuración, sino valernos de lo que ya se obtuvo. El modelo cinemático directo de esta configuración respecto al sistema de referencia inercial sería:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix} \dot{\phi}_f = \begin{bmatrix} r \cos\theta \\ r \sin\theta \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix} \dot{\phi}_f \quad (3.90)$$

Las velocidades respecto al sistema inercial y en función de las velocidades lineales y angulares locales del robot quedan:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos\theta & \dot{y} &= v \sin\theta & \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{x} &= r \cos\theta \cdot \dot{\phi}_f & \dot{y} &= r \sin\theta \cdot \dot{\phi}_f & \dot{\theta} &= \frac{r}{d} \tan\beta \cdot \dot{\phi}_f \end{aligned} \quad (3.91)$$

Y la representación incluyendo a la velocidad angular de dirección  $\dot{\beta}$  quedaría representada como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos\theta \\ r \sin\theta \\ \frac{r}{d} \tan\beta \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}_f + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\beta} = \begin{bmatrix} r \cos\theta & 0 \\ r \sin\theta & 0 \\ \frac{r}{d} \tan\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_f \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

La representación matricial de la cinemática inversa diferencial respecto al sistema de referencia local del robot es:

$$\dot{\phi}_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R \dot{x} \\ {}^R \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{\phi}_f = \frac{1}{r} {}^R \dot{x} \quad (3.93)$$

### 3.2.7.2 Análisis mediante el Centro Instantáneo de Rotación

Las variables que aparecen en la Figura 3.32 corresponden a las mismas que se tomaron en consideración en el robot tipo bicicleta, con la única diferencia de que las dos ruedas activas traseras pueden verse como una única rueda fija, como se demostró en el análisis mediante las ecuaciones de restricción de las ruedas.

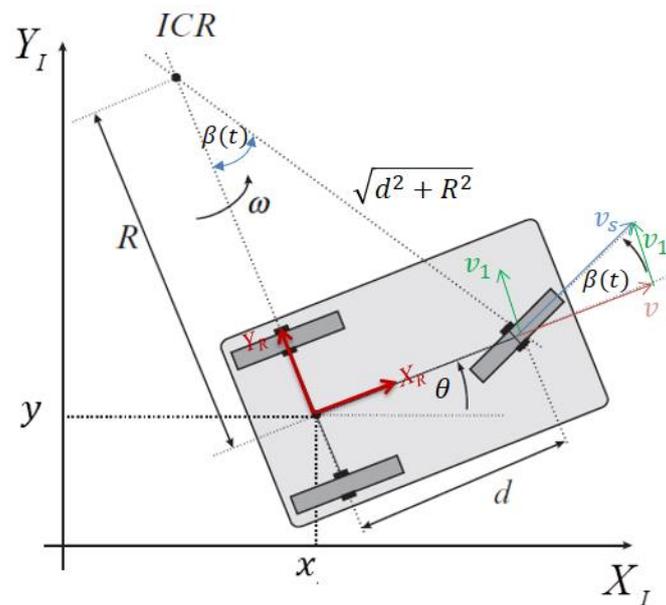


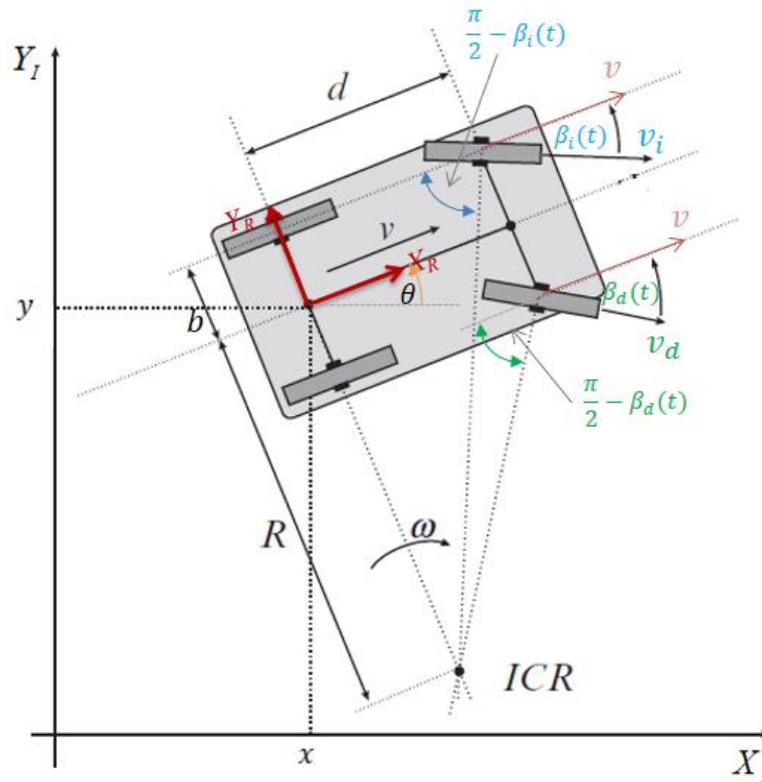
Figura 3.32. Geometría de un robot tipo triciclo con representación del ICR.

Por lo expuesto anteriormente, el robot tipo triciclo tiene la misma cinemática que el robot tipo bicicleta en cualquier de sus dos posibles configuraciones con rueda pasiva o activa. Debido a estas razones, no se va a realizar la deducción analítica y matemática de la cinemática mediante el análisis del ICR puesto que son las mismas que se obtuvieron en la sección 3.2.6.2 mediante el análisis del ICR para el robot tipo bicicleta.

### 3.2.8 Modelo Cinemático del Robot Ackermann

Este tipo de robot móvil consta de cuatro ruedas, dos de ellas convencionales fijas y las otras dos orientables centradas; este tipo de configuración es la que se encuentra en la mayoría de los automóviles. En este caso, el vehículo suele accionarse mediante un motor colocado a través de dos ruedas fijas traseras y la dirección se consigue mediante un actuador que permite orientar

las dos ruedas delanteras, como se muestra en la Figura 3.33. Se ha colocado el origen del sistema de referencia local de robot en la mitad del eje de las ruedas de tracción.



**Figura 3.33.** Geometría de un robot tipo Ackermann con representación del ICR.

La idea detrás de la configuración Ackermann es que la rueda delantera interior (más cercana a ICR) debe orientarse en un ángulo  $\beta_d$  mayor que la rueda delantera exterior  $\beta_i$  para permitir que el robot gire alrededor del punto medio entre el eje de las ruedas traseras, además, la rueda delantera interior recorre una distancia más corta que la exterior. En consecuencia, la rueda delantera interior viaja a una velocidad menor que la rueda delantera exterior ( $v_d < v_i$ ).

El mecanismo de conducción Ackermann permite que las ruedas traseras no tengan ángulo de deslizamiento, lo cual requiere que el punto ICR se encuentre sobre una línea recta definida por el eje de las ruedas traseras, por tanto, este mecanismo de accionamiento minimiza el desgaste de los neumáticos. En la Figura 3.33, la rueda delantera izquierda está en el lado exterior y la rueda delantera derecha está en el lado interior, por tanto, las orientaciones de dirección de las ruedas delanteras se determinan a partir de

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta_i\right) = \frac{R + b}{d}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta_d\right) = \frac{R - b}{d}$$

y los ángulos de dirección de cada rueda delantera se expresan como

$$\beta_i = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{R + b}{d}\right) \quad (3.94)$$

$$\beta_d = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{R - b}{d}\right) \quad (3.95)$$

Las ruedas traseras interior y exterior giran alrededor del ICR con la misma velocidad angular  $\omega$ ; por lo tanto, sus velocidades lineales son

$$v_i = \omega(R + b) \quad v_d = \omega(R - b) \quad (3.96)$$

Este tipo de accionamiento cinemático es especialmente apropiado para modelar vehículos más grandes. Un modelo de movimiento más simplificado también puede ser descrito usando la cinemática estudiada del robot tipo triciclo (ecuación 3.90) en cual se asume que los ángulos de dirección de las dos ruedas delanteras son iguales y puede analizarse al robot como si tuviese una única rueda directriz con un ángulo promedio de  $\beta = \pi/2 - \arctan(R/d)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix} \dot{\varphi}_f = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta \\ r \cdot \sin\theta \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix} \dot{\varphi}_f \quad (3.97)$$

Las velocidades respecto al sistema inercial y en función de las velocidades lineales y angulares locales del robot quedan:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos\theta & \dot{y} &= v \sin\theta & \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{x} &= r \cdot \cos\theta \cdot \dot{\varphi}_f & \dot{y} &= r \cdot \sin\theta \cdot \dot{\varphi}_f & \dot{\theta} &= \frac{r}{d} \tan\beta \cdot \dot{\varphi}_f \end{aligned} \quad (3.98)$$

Y la representación incluyendo a la velocidad angular de dirección  $\dot{\beta}$  quedaría representada como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta \\ r \cdot \sin\theta \\ \frac{r}{d} \tan\beta \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}_f + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\beta} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta & 0 \\ r \cdot \sin\theta & 0 \\ \frac{r}{d} \tan\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_f \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

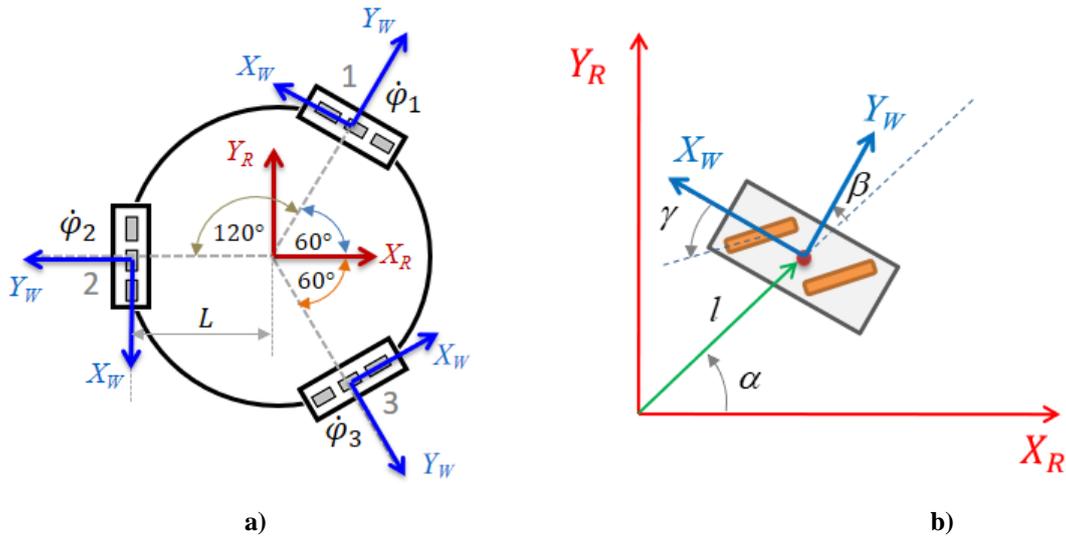
Aquí, hay una singularidad en  $\beta = \pm \pi/2$ , que corresponde al “atasco” del robot móvil cuando las ruedas delanteras son normales al eje longitudinal del chasis. En realidad, esta singularidad no ocurre en la práctica debido al rango restringido del ángulo de dirección  $\beta$  ( $-\pi/2 < \beta < \pi/2$ ).

Si se consideran todas las variables y parámetros de diseño del robot con accionamiento Ackermann, el querer determinar la cinemática inversa es complicado y supera el alcance de este trabajo. En general, no existen expresiones de la cinemática inversa de la configuración Ackermann, debiendo aplicarse la integración numérica.

Hay que tener en cuenta que la velocidad real de las cuatro ruedas es diferente, por consiguiente, el cálculo de la velocidad del centro guiado del robot a partir de la velocidad de una rueda da lugar a errores. Asimismo, el radio de curvatura  $R$  tampoco puede medirse de forma directa a partir de las curvaturas de las ruedas directrices ya que cada una de ellas se mueve según un arco de diferente radio. Por último, hay que señalar que efectos tales como la deformación de los neumáticos hacen que la orientación de la rueda de dirección no sea la prevista.

### 3.2.9 Modelo Cinemático del Robot Omnidireccional de Tres Ruedas

La estructura geométrica de un omnirobot de tres ruedas universales se muestra en la Figura 3.34. Este robot tiene tres ruedas universales (ángulo de los rodillos  $\gamma = 0^\circ$ ), dispuestas de forma radial y simétricamente, con los ejes de rotación de los rodillos perpendiculares a cada eje de rotación de cada rueda principal. El sistema de referencia local del robot se ha ubicado en el centro del chasis, para posteriormente alinear al robot, tal que el eje  $X_R$  es colineal con el eje  $Y_W$  de la rueda 2. Suponemos que la distancia entre cada rueda y el origen del sistema de referencia del robot es  $L$ , y que las tres ruedas tienen el mismo radio  $r$ .



**Figura 3.34.** Robot omnidireccional de tres ruedas universales: **a)** Geometría, **b)** Representación de la rueda omnidireccional en el plano.

Una vez más, el valor del vector  ${}^I\dot{\xi}$  se puede calcular como una combinación de las restricciones (3.21) de las tres ruedas omnidireccionales del robot, según la ecuación:

$$[\sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \quad -\cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \quad -l_i \cos(\beta_i + \gamma_i)]. {}^R\mathbf{R}_I \quad {}^I\dot{\xi} = r_w \dot{\phi}_i \cos \gamma_i \quad (3.100)$$

Antes de usar la ecuación de restricción de rodadura primero se debe establecer los valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  para cada rueda. Con referencia a la Figura 3.34, podemos ver que  $\gamma = 0^\circ$  para la rueda universal ( $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0^\circ$ ); tenga en cuenta que esto simplifica inmediatamente la ecuación (3.100) a la ecuación (3.6), que corresponde a las restricciones de rodadura de una rueda estándar fija. Dada la ubicación particular del sistema de referencia local del robot, el valor de  $\alpha$  para cada rueda se calcula fácilmente:  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\alpha_2 = 180^\circ$  y  $\alpha_3 = -60^\circ$ . Además,  $\beta = 0$  para todas las ruedas porque las ruedas son tangentes al cuerpo circular del robot. Empleado estos valores se pueden obtener las ecuaciones de restricción para las tres ruedas.

Restricción combinada para la rueda 1:

$$[\sin(60^\circ) \quad -\cos(60^\circ) \quad -L \cos(0^\circ)] {}^R\dot{\xi} = r \dot{\phi}_1 \cos(0^\circ)$$

$$\left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -L \right] {}^R\dot{\xi} = r \dot{\phi}_1$$

Restricción combinada para la rueda 2:

$$\begin{aligned} [\sin(180^\circ) \quad -\cos(180^\circ) \quad -L \cos(0^\circ)]^R \dot{\xi} &= r \dot{\phi}_2 \cos(0^\circ) \\ [0 \quad 1 \quad -L]^R \dot{\xi} &= r \dot{\phi}_2 \end{aligned}$$

Restricción combinada para la rueda 3:

$$\begin{aligned} [\sin(-60^\circ) \quad -\cos(-60^\circ) \quad -L \cos(0^\circ)]^R \dot{\xi} &= r \dot{\phi}_3 \cos(0^\circ) \\ \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -L\right]^R \dot{\xi} &= r \dot{\phi}_3 \end{aligned}$$

La fusión de las tres ecuaciones matriciales de restricción da como resultado la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \\ 0 & 1 & -L \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \end{bmatrix}^R \dot{\xi} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix}$$

A partir de la expresión anterior se determina la matriz Jacobiana, la cual permite obtener la expresión cinemática directa de este robot:

$$\mathbf{J} = \mathbf{B}^+ \mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3L} & -\frac{1}{3L} & -\frac{1}{3L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \frac{r}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ -1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$${}^R \dot{\xi} = \mathbf{J} \dot{\delta}$$

$$\begin{aligned} {}^R \dot{\xi} &= \frac{r}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ -1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \dot{\delta} & \begin{bmatrix} {}^R \dot{x} \\ {}^R \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \frac{r}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ -1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.101)$$

Por lo tanto, las expresiones para las velocidades lineal y angular del robot en función de la velocidad de las ruedas con respecto a su sistema de referencia local serían:

$$\begin{aligned}
{}^R\dot{x} = v_x &= \frac{r\sqrt{3}}{3}(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_3) & {}^R\dot{y} = v_y &= \frac{r}{3}(-\dot{\phi}_1 + 2\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3) \\
\dot{\theta} = \omega &= -\frac{r}{3L}(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3)
\end{aligned} \tag{3.102}$$

La cinemática directa respecto al sistema inercial quedaría:

$$\begin{aligned}
{}^I\dot{\xi} &= {}^I\mathbf{R}_R {}^R\dot{\xi} = ({}^R\mathbf{R}_I)^{-1} {}^R\dot{\xi} \\
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{r}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ -1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \frac{2r}{3} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \pi/3) & -\sin(\theta) & \sin(\theta - \pi/3) \\ -\cos(\theta + \pi/3) & \cos(\theta) & -\cos(\theta - \pi/3) \\ -\frac{1}{2L} & -\frac{1}{2L} & -\frac{1}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

La matriz jacobiana inversa puede ser obtenida directamente puesto que la matriz  $\mathbf{J}$  es cuadrada:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \\ 0 & 1 & -L \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \end{bmatrix}$$

La representación matricial de la cinemática inversa diferencial respecto al sistema de referencia local del robot es  $\delta = \mathbf{J}^{-1} {}^R\dot{\xi}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \\ 0 & 1 & -L \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R\dot{x} \\ {}^R\dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{3.104}$$

Para calcular la cinemática inversa respecto al sistema de coordenadas global reemplazamos en la expresión (3.104) la relación  ${}^R\dot{\xi} = {}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\xi}$ , con lo cual se obtiene  $\delta = \mathbf{J}^{-1} {}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\xi}$ :

$${}^I \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \\ 0 & 1 & -L \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$${}^I \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \pi/3) & -\cos(\theta + \pi/3) & -L \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & -L \\ \sin(\theta - \pi/3) & -\cos(\theta - \pi/3) & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

En la Figura 3.35 se presenta el código desarrollado en Matlab para determinar la cinemática directa e inversa de un robot omnidireccional de tres ruedas universales partiendo de las ecuaciones encontradas en esta sección.

```
%Creación de variables simbólicas
syms r L theta
%Cálculo de la cinemática directa respecto al sistema global
B=[sqrt(3)/2 -1/2 -L; 0 1 -L; -sqrt(3)/2 -1/2 -L]
D=[r 0 0; 0 r 0; 0 0 r]
J=simplify(inv(B)*D) %matriz Jacobiana directa
Rdi=[cos(theta) -sin(theta) 0; sin(theta) cos(theta) 0; 0 0 1];
Jglobal=simplify(Rdi*J)
%Cálculo de la cinemática inversa respecto al sistema global
invJ=inv(J); %matriz Jacobiana inversa
Rin=[cos(theta) sin(theta) 0; -sin(theta) cos(theta) 0; 0 0 1];
invJglobal=simplify(invJ*Rin)
```

**Figura 3.35.** Código en Matlab para determinar la cinemática directa e inversa de un robot omnidireccional de tres ruedas universales.

### 3.2.10 Modelo Cinemático del Robot Omnidireccional de Cuatro Ruedas

Considere el robot móvil de cuatro ruedas de la Figura 3.36, donde se puede observar la disposición de las ruedas suecas que tienen un ángulo de rodillo  $\pm 45^\circ$ . Se han establecidos los sistemas de coordenadas locales de las ruedas  $X_{wi}O_{wi}Y_{wi}(i = 1, 2, 3, 4)$ , tomando los centros de las ruedas como los orígenes del sistema. El sistema de referencia del robot  $\{X_R, Y_R\}$  está ubicado en el centro geoméricamente simétrico del chasis, para posteriormente alinear al robot, tal que el eje  $X_R$  es paralelo con todos los ejes  $Y_{wi}$  de las cuatro ruedas. Suponemos que la



La ecuación anterior permite determinar la cinemática inversa de una manera más fácil que si se hallara en primer lugar la cinemática directa, por dicha razón para el análisis cinemático se va a empezar con el cálculo de la cinemática inversa. De la ecuación anterior se despeja la velocidad angular de la rueda  $\dot{\phi}_i$ :

$$\dot{\phi}_i = -\frac{1}{r} \left[ \frac{\cos(\gamma_i)}{\sin \gamma_i} \quad \frac{\sin(\gamma_i)}{\sin \gamma_i} \quad \frac{l_i \sin(\beta_i + \gamma_i)}{\sin \gamma_i} \right] \cdot {}^R \dot{\xi} \quad (3.107)$$

Para esta última expresión se puede realizar la siguiente simplificación

$$\begin{aligned} \frac{l_i \sin(\beta_i + \gamma_i)}{\sin \gamma_i} &= \frac{l_i \sin \beta_i \cos \gamma_i + l_i \sin \gamma_i \cos \beta_i}{\sin \gamma_i} = l_i \sin \beta_i \cot \gamma_i + l_i \cos \beta_i \\ &= l_i \sin(-\alpha_i) \cot \gamma_i + l_i \cos(-\alpha_i) = -l_i \sin(\alpha_i) \cot \gamma_i + l_i \cos(\alpha_i) \\ &= -H_i \cot \gamma_i + W_i \end{aligned}$$

Aplicando esta simplificación la ecuación (3.107) se reduce a:

$$\dot{\phi}_i = -\frac{1}{r} [\cot(\gamma_i) \quad 1 \quad W_i - H_i \cot(\gamma_i)]. {}^R \dot{\xi}$$

Como se puede observar se ha logrado eliminar de la ecuación los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ , dejándola solo en función del parámetro  $\gamma_i$  lo cual facilita los cálculos. Con referencia a las Figuras 3.13 y 3.36, podemos notar que  $\gamma_2 = \gamma_4 = \gamma = 45^\circ$  y  $\gamma_1 = \gamma_3 = -\gamma = -45^\circ$ . Empleando estos valores y tomando en consideración los signos de las distancias  $H_i$  y  $W_i$  según los ejes del sistema de coordenadas del robot se pueden obtener las ecuaciones de restricción para las cuatro ruedas.

Restricción combinada para la rueda 1:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= -\frac{1}{r} [-\cot(\gamma) \quad 1 \quad W + H \cot(\gamma)]. {}^R \dot{\xi} \\ \dot{\phi}_1 &= -\frac{1}{r} [-1 \quad 1 \quad W + H]. {}^R \dot{\xi} \end{aligned}$$

Restricción combinada para la rueda 2:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 &= -\frac{1}{r} [\cot(\gamma) \quad 1 \quad -W - H \cot(\gamma)]. {}^R \dot{\xi} \\ \dot{\phi}_2 &= -\frac{1}{r} [1 \quad 1 \quad -(W + H)]. {}^R \dot{\xi} \end{aligned}$$

Restricción combinada para la rueda 3:

$$\dot{\phi}_3 = -\frac{1}{r}[-\cot(\gamma) \quad 1 \quad -W - H \cot(\gamma)]. \cdot {}^R \dot{\xi}$$

$$\dot{\phi}_3 = -\frac{1}{r}[-1 \quad 1 \quad -(W + H)]. \cdot {}^R \dot{\xi}$$

Restricción combinada para la rueda 4:

$$\dot{\phi}_4 = -\frac{1}{r}[\cot(\gamma) \quad 1 \quad W + H \cot(\gamma)]. \cdot {}^R \dot{\xi}$$

$$\dot{\phi}_4 = -\frac{1}{r}[1 \quad 1 \quad W + H]. \cdot {}^R \dot{\xi}$$

La fusión de las cuatro ecuaciones matriciales de restricción da como resultado la expresión completa de la cinemática inversa respecto al sistema de referencia del robot:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} -1 & 1 & W + H \\ 1 & 1 & -(W + H) \\ -1 & 1 & -(W + H) \\ 1 & 1 & W + H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R \dot{x} \\ {}^R \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

La matriz jacobiana de la cinemática inversa  $J^{-1}$  se expresa como:

$$J^{-1} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} -1 & 1 & W + H \\ 1 & 1 & -(W + H) \\ -1 & 1 & -(W + H) \\ 1 & 1 & W + H \end{bmatrix} \quad \delta = J^{-1} \cdot {}^R \dot{\xi}$$

Para calcular la cinemática inversa respecto al sistema de coordenadas global reemplazamos en la expresión anterior la relación  ${}^R \dot{\xi} = {}^R R_I \cdot {}^I \dot{\xi}$ , con lo cual se obtiene  $\delta = J^{-1} {}^R R_I \cdot {}^I \dot{\xi}$ :

$${}^I \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} -1 & 1 & W + H \\ 1 & 1 & -(W + H) \\ -1 & 1 & -(W + H) \\ 1 & 1 & W + H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$${}^I \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\theta + \pi/4) & \cos(\theta + \pi/4) & \frac{\sqrt{2}}{2}(W + H) \\ \cos(\theta + \pi/4) & \sin(\theta + \pi/4) & -\frac{\sqrt{2}}{2}(W + H) \\ -\sin(\theta + \pi/4) & \cos(\theta + \pi/4) & -\frac{\sqrt{2}}{2}(W + H) \\ \cos(\theta + \pi/4) & \sin(\theta + \pi/4) & \frac{\sqrt{2}}{2}(W + H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

A partir la matriz jacobiana inversa  $J^{-1}$ , la matriz  $J$  puede ser determinada; si se hace el cambio de variable  $\mathbf{A} = J^{-1}$  entonces:

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{J} = -\frac{r}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} \end{bmatrix}$$

A partir de la matriz jacobiana  $J$  se puede obtener la expresión de la cinemática directa de este robot respecto al sistema de referencia local aplicando  ${}^R \dot{\xi} = J \dot{\delta}$ :

$${}^R \dot{\xi} = -\frac{r}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} \end{bmatrix} \dot{\delta}$$

$$\begin{bmatrix} {}^R \dot{x} \\ {}^R \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = -\frac{r}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

La cinemática directa respecto al sistema inercial quedaría  ${}^I \dot{\xi} = {}^I \mathbf{R}_R {}^R \dot{\xi}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R \dot{x} \\ {}^R \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = -\frac{r}{4} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2} r}{-4} \begin{bmatrix} -\cos(\theta + \pi/4) & \sin(\theta + \pi/4) & -\cos(\theta + \pi/4) & \sin(\theta + \pi/4) \\ \sin(\theta + \pi/4) & \cos(\theta + \pi/4) & \sin(\theta + \pi/4) & \cos(\theta + \pi/4) \\ \frac{\sqrt{2}}{2(H+W)} & \frac{-\sqrt{2}}{2(H+W)} & \frac{-\sqrt{2}}{2(H+W)} & \frac{\sqrt{2}}{2(H+W)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

En la Figura 3.37 se presenta el código desarrollado en Matlab para determinar la cinemática directa e inversa de un robot omnidireccional de cuatro ruedas suecas partiendo de las ecuaciones encontradas en esta sección.

```
%Creación de variables simbólicas
syms r W H theta

%Cálculo de la cinemática inversa respecto al sistema global
invJ=(-1/r).*[-1 1 W+H; 1 1 -W-H; -1 1 -W-H;1 1 W+H] %matriz
Jacobiana inversa

Rin=[cos(theta) sin(theta) 0;-sin(theta) cos(theta) 0;0 0 1];
invJglobal=simplify(invJ*Rin)

%Cálculo de la cinemática directa respecto al sistema global
A=invJ;
invA=simplify(inv(A'*A)*A');
J=invA %matriz Jacobiana directa
Rdi=[cos(theta) -sin(theta) 0;sin(theta) cos(theta) 0;0 0 1];
Jglobal=simplify(Rdi*J)
```

**Figura 3.37.** Código en Matlab para determinar la cinemática directa e inversa de un robot omnidireccional de cuatro ruedas suecas.

### 3.3 Maniobrabilidad del Robot Móvil

La movilidad cinemática del chasis del robot es su capacidad para moverse directamente en el entorno. La restricción básica que limita la movilidad es la regla de que cada rueda debe satisfacer su restricción de deslizamiento. Es importante señalar que las restricciones a la movilidad del robot resultan únicamente de las condiciones que involucran las ruedas fijas y orientables centradas. Por lo tanto, podemos derivar formalmente la movilidad del robot a partir de la ecuación (3.34).

$$\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) {}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1f} \\ \mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s) \end{bmatrix} {}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0} \quad (3.112)$$

Además del movimiento cinemático instantáneo, un robot móvil puede manipular aún más su posición respecto al tiempo, mediante el direccionamiento de las ruedas orientables. Como veremos en la sección 3.3.3, la maniobrabilidad general de un robot es, por lo tanto, una combinación de la movilidad disponible basada en las restricciones de deslizamiento cinemático de las ruedas fijas, más la libertad adicional que aporta la dirección y el giro de las ruedas orientables centradas [1-5].

### 3.3.1 Grado de Movilidad

La ecuación (3.112) impone la restricción de que cada rueda debe evitar cualquier deslizamiento lateral. Por supuesto, esto es válido por separado para todas y cada una de las ruedas, por lo que es posible especificar esta restricción por separado para ruedas estándar fijas y orientables:

$$\mathbf{C}_{1f} {}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0} \quad (3.113)$$

$$\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s) {}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0} \quad (3.114)$$

Para que se satisfagan estas dos restricciones, el vector de movimiento  ${}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\boldsymbol{\xi}}$  debe pertenecer al *espacio nulo* de la matriz de proyección  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$ , que es simplemente una combinación de  $\mathbf{C}_{1f}$  y  $\mathbf{C}_{1s}$ . Matemáticamente, el espacio nulo de  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$  es el espacio  $\mathcal{N}$  tal que para cualquier vector  $n$  en  $\mathcal{N}$ ,  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) \cdot n = 0$ . Si las restricciones cinemáticas son respetadas, el movimiento del robot siempre debe estar dentro del espacio  $\mathcal{N}$ . Las restricciones cinemáticas (ecuaciones (3.113) y (3.114)) también se pueden demostrar geométricamente usando el concepto de centro instantáneo de rotación de un robot (ICR), tal y como se explicó en la sección 3.2.4.4.

Por tanto, la cinemática del chasis del robot es una función del conjunto de *restricciones independientes* que surgen de todas las ruedas convencionales. La interpretación matemática de la independencia está relacionada con el *rango* de una matriz; recuerde que el rango de una matriz es el mayor número de filas o columnas linealmente independientes. La ecuación (3.112) representa todas las restricciones de deslizamiento impuestas por las ruedas del robot móvil, por lo tanto, el rango de  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$  es el número de restricciones independientes.

Cuanto mayor sea el número de restricciones independientes y, por tanto, mayor será el rango de  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$ , más limitada es la movilidad del robot. Por ejemplo, considere un robot con una sola rueda estándar fija, este robot puede ser un monociclo o puede tener varias ruedas suecas; sin embargo, tiene exactamente una rueda estándar fija. La rueda está en una posición especificada por los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $l$  en relación con el sistema de referencia local del robot.  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$  comprende  $\mathbf{C}_{1f}$  y  $\mathbf{C}_{1s}$ , sin embargo, dado que no hay ruedas estándar orientables,  $\mathbf{C}_{1s}$  está vacío (matriz nula) y, por lo tanto,  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$  contiene solo  $\mathbf{C}_{1f}$ . Debido a que hay una rueda estándar fija, esta matriz tiene un rango de uno y, por lo tanto, este robot tiene una única restricción independiente de movilidad:

$$\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) = \mathbf{C}_{1f} = [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin \beta]$$

Ahora añadamos una rueda estándar fija adicional para crear un robot con accionamiento diferencial al restringir la segunda rueda para que esté alineada con el mismo eje horizontal que la rueda original. Sin pérdida de generalidad, podemos colocar un punto  $P$  en el punto medio entre los centros de las dos ruedas. Dado  $\alpha_1, \beta_1, l_1$  para la primera rueda y  $\alpha_2, \beta_2, l_2$  para la segunda rueda, se cumple geoméricamente que  $l_1 = l_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  y  $\alpha_1 + \pi = \alpha_2$ . Por lo tanto, en este caso, la matriz  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$  tiene dos restricciones, pero un rango de uno  $\text{rango}[\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)] = 1$ :

$$\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) = \mathbf{C}_{1f} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) & 0 \\ \cos(\alpha_1 + \pi) & \sin(\alpha_1 + \pi) & 0 \end{bmatrix}$$

Alternativamente, considere el caso en el que la segunda rueda se coloca en el plano de la primera rueda, pero con la misma orientación, como en el caso del robot tipo bicicleta con la dirección bloqueada en la posición delantera. De nuevo colocamos el punto  $P$  entre los dos centros de las ruedas y orientamos las ruedas de manera que se encuentren en el eje  $x_1$ . Esta geometría implica que  $l_1 = l_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \pi/2$ ,  $\alpha_1 = 0$  y  $\alpha_2 = \pi$ , por lo tanto, la matriz  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$  retiene dos restricciones independientes y tiene un rango de dos  $\text{rango}[\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)] = 2$ :

$$\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) = \mathbf{C}_{1f} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) & l_1 \sin(\pi/2) \\ \cos(3\pi/2) & \sin(3\pi/2) & l_1 \sin(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & l_1 \\ 0 & -1 & l_1 \end{bmatrix}.$$

En general, si  $\text{rango}[\mathbf{C}_{1f}] > 1$  entonces el vehículo puede, a lo mejor, solo viajar a lo largo de un círculo o en línea recta. Esta configuración significa que el robot tiene dos o más restricciones debidas a ruedas estándar fijas que no comparten el mismo eje horizontal de

rotación. Debido a que tales configuraciones tienen sólo una forma degenerada de movilidad en el plano, no las consideramos en el resto de este capítulo. Sin embargo, tenga en cuenta que algunas configuraciones degenerativas, como el robot de cuatro ruedas con dirección deslizante, son útiles en ciertos entornos, como en suelos sueltos y arenosos, aunque no satisfagan las restricciones de deslizamiento. No es de sorprenderse, que el precio que debe pagarse por tales violaciones de las restricciones de deslizamiento es que la estimación basada en la odometría se vuelve menos precisa y la eficiencia energética se reduce drásticamente.

En general, un robot tendrá cero o más ruedas estándar fijas y cero o más ruedas estándar orientables, por lo tanto, podemos identificar el posible rango de valores para cualquier robot como  $0 \leq \text{rango}[\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)] \leq 3$ , esto es equivalente a decir que los ejes de rotación de las ruedas fijas y orientables se cruzan en el ICR. Considere el caso en donde  $\text{rango}[\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)] = 0$ , esto es posible solo si no hay restricciones cinemáticas independientes en  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$ , en este caso, no hay ruedas estándar fijas ni orientables unidas al sistema del robot, es decir,  $N_f = N_s = 0$ .

Considere el otro extremo en donde  $\text{rango}[\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)] = 3$ , este es el rango máximo posible ya que las restricciones cinemáticas se especifican a lo largo de tres grados de libertad (es decir, la matriz de restricciones tiene tres columnas de ancho), por lo tanto, no puede haber más de tres restricciones independientes. De hecho, cuando  $\text{rango}[\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)] = 3$ , entonces el robot está completamente restringido en todas las direcciones y, por lo tanto, está degenerado, ya que cualquier movimiento en el plano es totalmente imposible. Ahora estamos listos para definir formalmente el *grado de movilidad*  $\delta_m$  de un robot:

$$\delta_m = \dim\mathcal{N}[\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)] = 3 - \text{rango}[\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)] \quad (3.115)$$

La dimensionalidad del espacio nulo ( $\dim\mathcal{N}$ ) de la matriz  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$  es una medida del número de grados de libertad del chasis del robot que se puede manipular mediante cambios en la velocidad de la rueda. Es lógico, por tanto, que  $\delta_m$  oscile entre 0 y 3, pero lo ideal es que  $\delta_m$  este en el rango entre 1 y 3 ( $1 \leq \delta_m \leq 3$ ) para que el robot pueda tener movilidad en el plano.

Considere un chasis de accionamiento diferencial ordinario, en tal robot hay dos ruedas estándar fijas que comparten un eje horizontal común; como se discutió anteriormente, la segunda rueda no agrega restricciones cinemáticas independientes al sistema, por lo tanto,  $\text{rango}[\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)] = 1$  y  $\delta_m = 3 - 1 = 2$ . Esto encaja con la intuición de que un robot de accionamiento diferencial

puede controlar tanto la tasa de cambio de su orientación como su velocidad de avance/retroceso, simplemente manipulando las velocidades de las ruedas. En otras palabras, su ICR está obligado a estar en la línea infinita que se extiende desde los ejes horizontales de sus ruedas.

Por el contrario, considere un chasis de un robot tipo bicicleta, esta configuración consta de una rueda estándar fija y una rueda estándar orientable, en este caso, cada rueda contribuye con una restricción de deslizamiento independiente a  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$ , por lo tanto,  $\delta_m = 3 - 2 = 1$ . Tenga en cuenta que el robot tipo bicicleta tiene el mismo número total de ruedas no omnidireccionales que el chasis de accionamiento diferencial y, de hecho, una de sus ruedas es direccional, sin embargo, tiene un grado menos de movilidad. Tras reflexionar, esto es apropiado, ya que una bicicleta solo tiene control sobre su velocidad de avance/retroceso mediante la manipulación directa de las velocidades de las ruedas y solo mediante la dirección puede cambiar su ICR.

Como era de esperarse, según la ecuación (3.115), cualquier robot que consista solo de ruedas omnidireccionales, como ruedas suecas o esféricas, tendrá la máxima movilidad,  $\delta_m = 3 - 0 = 3$ , tal robot puede manipular directamente los tres grados de libertad.

### 3.3.2 Grado de Direccionalidad

El grado de movilidad  $\delta_m$  definido anteriormente cuantifica los *grados de libertad controlables* en función de los cambios en la velocidad de la rueda. La dirección también puede tener un impacto eventual en la postura del chasis  ${}^I\dot{\boldsymbol{\xi}}$  de un robot, aunque el impacto es indirecto porque después de cambiar el ángulo  $\beta$  de una rueda estándar orientable, el robot debe moverse para que el cambio en el ángulo de dirección tenga impacto en la postura [1].

Al igual que con la movilidad, nos preocupamos por el número de parámetros de dirección controlables de forma independiente al definir el *grado de direccionalidad*  $\delta_s$  se tiene que:

$$\delta_s = \text{rango}[\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)] \quad (3.116)$$

Recordemos que, en el caso de la movilidad, un aumento en el rango de  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$  implicaba más restricciones cinemáticas y, por tanto, un sistema menos móvil. En el caso de la direccionalidad, un aumento en el rango de  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$  implica más grados de libertad de dirección y, por lo tanto,

una mayor maniobrabilidad eventual. Dado que  $\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s)$  incluye a  $\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)$ , esto significa que una rueda estándar orientable puede reducir la movilidad, pero también puede aumentar la maniobrabilidad: su orientación particular en cualquier instante impone una restricción cinemática, pero su capacidad para cambiar esa orientación puede conducir a trayectorias adicionales.

El rango del grado de direccionalidad  $\delta_s$  puede ser especificado entre  $0 \leq \delta_s \leq 2$ . El caso  $\delta_s = 0$  implica que el robot no tiene ruedas estándar orientables,  $N_s = 0$ . El caso  $\delta_s = 1$  es más común cuando una configuración de robot incluye una o más ruedas estándar orientables; mientras que  $\delta_s = 2$  solo se puede obtener cuando el robot no cuenta con ruedas estándar fijas.

Por ejemplo, considere un automóvil común, en este caso  $N_f = 2$  y  $N_s = 2$ , pero las ruedas fijas comparten un eje común y, por tanto,  $\text{rango}[\mathbf{C}_{1f}] = 1$ . Como se explicó en la sección 3.2.4.4 las ruedas fijas y cualquiera de las ruedas orientables restringen al ICR a ser un punto a lo largo de la línea que se extiende desde el eje trasero, por lo tanto, la segunda rueda direccional no impone ninguna restricción cinemática independiente así que  $\text{rango}[\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)] = 1$ , y en este caso  $\delta_m = 1$  y  $\delta_s = 1$ .

El caso  $\delta_s = 2$  solo es posible en robots sin ruedas estándar fijas donde  $N_f = 0$ , en estas circunstancias, es posible crear un chasis con dos ruedas estándar orientables independientes, como un pseudobiciclo (o doble direccionamiento) en el que ambas ruedas son orientables. Luego, la orientación de una rueda restringe el ICR a una línea, mientras que la segunda rueda puede restringir el ICR a cualquier punto a lo largo de esa línea. Curiosamente, esto significa que  $\delta_s = 2$  implica que el robot puede colocar su ICR en cualquier lugar del plano del piso.

Si un robot está equipado con más ruedas orientables que grados de direccionalidad  $\delta_s$  ( $N_s > \delta_s$ ), el movimiento de las ruedas extras debe coordinarse para garantizar la existencia del ICR en cada instante.

### 3.3.3 Grado de Maniobrabilidad

Los *grados de libertad generales* que puede manipular un robot, llamado **grado de maniobrabilidad**  $\delta_M$ , se pueden definir fácilmente en términos de movilidad y direccionalidad:

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s \quad (3.117)$$

Por lo tanto, la maniobrabilidad incluye tanto los grados de libertad que el robot manipula directamente a través de la velocidad de las ruedas como los grados de libertad que manipula indirectamente al cambiar la configuración de la dirección y movimiento. Con base al estudio de las configuraciones de robots analizadas hasta el momento, se puede establecer el grado de maniobrabilidad de estos según se resume en la Tabla 3.1.

Configuración	Grados de movilidad ( $\delta_m$ )	Grados de direccionalidad ( $\delta_s$ )	Grados de maniobrabilidad ( $\delta_M$ )	Notación ( $\delta_m, \delta_s$ )
Bicicleta	1	1	2	(1,1)
Diferencial	2	0	2	(2,0)
Sincrónica	1	1	2	(1,1)
Triciclo	1	1	2	(1,1)
Ackermann	1	1	2	(1,1)
Doble Direccionamiento	1	2	3	(1,2)
Omnidireccional	3	0	3	(3,0)

**Tabla 3.1.** Grados de movilidad, direccionalidad y maniobrabilidad de algunas configuraciones típicas de robots móviles.

Un robot con doble direccionamiento corresponde a una configuración que está conformada por dos ruedas orientables activas que comparten un eje común de rotación y cada rueda es controlada por un motor independiente; cuenta además con una tercera rueda especial pasiva que gira libremente. En el caso del robot con configuración omnidireccional este puede estar diseñado con tres o cuatro ruedas especiales o tipo castor, cada una de ellas controlada por un motor independiente.

Tenga en cuenta que dos robots con el mismo  $\delta_M$  no son necesariamente equivalentes. Por ejemplo, las geometrías con accionamiento diferencial y triciclo tienen la misma

maniobrabilidad  $\delta_M = 2$ . En la tracción diferencial, toda la maniobrabilidad es el resultado directo de la movilidad porque  $\delta_m = 2$  y  $\delta_s = 0$ . En el caso de un triciclo, la maniobrabilidad resulta también de la direccionalidad puesto que  $\delta_m = 1$  y  $\delta_s = 1$ . Ninguna de estas dos configuraciones permite que el ICR se extienda en cualquier parte sobre el plano, en ambos casos, el ICR debe estar sobre una línea predefinida con respecto al sistema de referencia del robot. En el caso del accionamiento diferencial, esta línea se extiende desde el eje común de las dos ruedas activas fijas y las velocidades de las ruedas diferenciales establecen el punto ICR sobre esta línea. En un triciclo, esta línea se extiende desde el eje común compartido por las dos ruedas pasivas fijas, con la rueda activa orientable centrada colocando el punto ICR a lo largo de esta línea.

De manera más general, para cualquier robot con  $\delta_M = 2$ , el ICR siempre está limitado a estar sobre una línea y para cualquier robot con  $\delta_M = 3$ , el ICR se puede establecer en cualquier punto del plano. Por lo tanto, para cualquier robot móvil con ruedas se cumple que  $2 \leq \delta_M \leq 3$ ; el caso  $\delta_M = 1$  no es aceptable porque corresponde a la rotación del robot alrededor de un punto ICR fijo.

Un último ejemplo demostrará el uso de las herramientas que hemos analizado hasta aquí. Una configuración de un robot común para la investigación de robótica móvil en interiores es la configuración de accionamiento sincrónico o sincronizado (Figura 3.17). Tal robot tiene dos motores y tres ruedas orientables que están mutuamente bloqueadas. Un motor proporciona energía para hacer girar las tres ruedas, mientras que el segundo motor proporciona energía para dirigir las tres ruedas. En un robot de accionamiento sincronizado de tres ruedas orientables se tiene que  $N_f = 0$  y  $N_s = 3$ , por lo tanto, el  $\text{rango}[\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)]$  se puede usar para determinar tanto  $\delta_m$  como  $\delta_s$ . Las tres ruedas orientables no comparten un eje común, por lo tanto, dos de las tres ruedas contribuyen con restricciones de deslizamiento independientes. La tercera rueda debe depender de estas dos restricciones para que el movimiento sea posible, por lo tanto,  $\text{rango}[\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)] = 2$  y  $\delta_m = 3 - 2 = 1$ . Esto es intuitivamente correcto considerando que un robot de accionamiento sincronizado con el ángulo de dirección fijo manipula solo un grado de libertad, que consiste en desplazarse hacia adelante y hacia atrás en línea recta.

Sin embargo, ocurre una complicación interesante al considerar  $\delta_s$ ; según la ecuación (3.116), el robot debería tener  $\delta_s = 2$ , de hecho, para un robot de tres ruedas orientables con la configuración geométrica de un robot de accionamiento sincronizado, esto sería correcto. Sin

embargo, tenemos información adicional, en una configuración de accionamiento sincronizado un solo motor direcciona las tres ruedas mediante una transmisión por correa. Por lo tanto, aunque idealmente si las ruedas fueran independientemente dirigibles, entonces el sistema alcanzaría  $\delta_s = 2$ ; en el caso de accionamiento sincronizado, el sistema de transmisión restringe aún más la cinemática de modo que en realidad  $\delta_s = 1$ . Finalmente, podemos calcular la maniobrabilidad para un robot de accionamiento sincronizado basándonos en estos valores siendo  $\delta_M = 1 + 1 = 2$ .

Este resultado implica que un robot de accionamiento sincronizado solo puede manipular en total dos grados de libertad. De hecho, si el lector reflexiona sobre la configuración de la rueda orientable de un robot de accionamiento sincronizado, resultará evidente que no hay forma de que cambie la orientación del chasis, solo se puede manipular la posición  $x$ - $y$  del chasis, por lo que, de hecho, un robot de accionamiento sincronizado tiene solo dos grados de libertad, de acuerdo con nuestra conclusión matemática.

### 3.4 Espacio de Trabajo y Restricciones de Movimiento

Para un robot móvil con ruedas, *la maniobrabilidad*  $\delta_M$  equivale a sus ***grados de libertad controlables***, los cuales se refieren a los grados de libertad que existe en los elementos de locomoción (ruedas) y que en general (no siempre) su valor está dado por el número total de motores utilizados para el accionamiento de las ruedas del robot.

El movimiento del robot móvil está limitado por restricciones dinámicas y cinemáticas. Las *restricciones dinámicas* tienen su origen en el modelo dinámico del sistema donde la respuesta del sistema está limitada debido a su inercia o restricciones de los actuadores (por ejemplo, por limitado del accionamiento del motor debido a sus capacidades o para evitar el deslizamiento de la rueda). Las *restricciones cinemáticas* tienen su origen en la construcción del robot y su modelo cinemático [1-2].

Pero el robot móvil está situado en algún entorno, y la siguiente cuestión es situar nuestro análisis en ese entorno; nos preocupamos por las formas en que el robot puede utilizar sus grados de libertad controlables para posicionarse en el entorno. Por ejemplo, considere el robot con configuración Ackerman o automóvil, donde el número total de grados de libertad controlables para dicho vehículo es  $\delta_M = 2$ , uno para la dirección y el segundo para el

accionamiento de las dos ruedas motrices. Pero ¿cuáles son los grados de libertad totales del vehículo en su entorno?, de hecho, son tres, el robot puede posicionarse en el plano en cualquier punto  $(x, y)$  con cualquier ángulo  $\theta$ . Los **grados de libertad totales** de un robot móvil con ruedas se define como el número de movimientos que puede realizar el robot en el espacio de configuración, en este caso serían 3: dos para posición  $(x, y)$  y uno para orientación  $(\theta)$ .

Por lo tanto, identificar el espacio de posibles configuraciones de un robot es importante, porque sorprendentemente puede exceder al valor de  $\delta_M$ . Además del espacio de trabajo, nos preocupamos por cómo el robot puede moverse entre varias configuraciones: ¿cuáles son los tipos de rutas que puede seguir? así como, ¿cuáles son sus posibles trayectorias a través de este espacio de configuración? En el resto de esta discusión, nos alejamos de los detalles cinemáticos internos como las ruedas y nos enfocamos en la postura  ${}^1\xi$  del chasis del robot y los grados de libertad de este. Con esto en mente, ubiquemos ahora al robot en el contexto de su espacio de trabajo.

### 3.4.1 Grados de Libertad

Al definir el espacio de trabajo de un robot móvil, es útil examinar primero su **espacio de velocidad admisible**. Dadas las restricciones cinemáticas del robot, su espacio de velocidad describe los componentes independientes del movimiento del robot y que este puede controlar. Por ejemplo, el espacio de velocidad de un robot monociclo puede ser representado con dos ejes, uno que representa su velocidad de avance instantánea y el segundo que representa el cambio instantáneo de su orientación  $\dot{\theta}$ .

La dimensión del espacio de velocidad de un robot es el número de velocidades independientes que el robot puede alcanzar en su entorno, esta definición también es conocida como **grados de libertad diferenciales** (*DDOF, Differential Degrees of Freedom*) [1]. Los grados de libertad diferenciales *DDOF* de un robot siempre es igual a su grado de movilidad  $\delta_m$ , por ejemplo, un robot tipo bicicleta tiene grado de maniobrabilidad  $\delta_M = \delta_m + \delta_s = 1 + 1 = 2$ , por lo tanto, el *DDOF* de esta configuración es de hecho 1.

A diferencia de un robot tipo bicicleta, ahora se considera un omnibot (robot omnidireccional) el cual consta de tres ruedas universales. Sabemos que en este caso el robot no cuenta con ruedas convencionales, lo que equivale a expresar  $\delta_M = \delta_m + \delta_s = 3 + 0 = 3$ , por lo tanto, el

omnibot tiene tres grados de libertad diferenciales ( $DDOF = \delta_m = 3$ ). Esto es apropiado, dado que debido a que dicho robot no tiene restricciones de movimiento cinemático, puede establecer de forma independiente las tres variables que conforman la postura  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ .

Dada la diferencia en  $DDOF$  entre un robot tipo bicicleta y un omnibot, consideremos los grados de libertad generales en el espacio de trabajo de cada configuración: el omnibot puede lograr cualquier postura  $(x, y, \theta)$  en su entorno y puede hacerlo directamente alcanzando las posiciones objetivos de los tres ejes simultáneamente porque  $DDOF = 3$ ; claramente tiene un espacio de trabajo con tres grados de libertad totales ( $DOF = 3$ ), donde  $DOF$  representa la capacidad del robot para alcanzar varias posturas  $(x, y, \theta)$  en su entorno o espacio de trabajo.

¿Puede un robot tipo bicicleta alcanzar alguna postura  $(x, y, \theta)$  en su entorno? Puede hacerlo, pero alcanzar algunos puntos de meta puede requerir más tiempo y energía en comparación con un omnibot equivalente. Por ejemplo, si la configuración bicicleta debe moverse lateralmente 1 m, la maniobra más simple y exitosa involucraría un movimiento en espiral o hacia adelante y hacia atrás similar al estacionamiento paralelo de automóviles. A pesar de aquello, una configuración bicicleta si puede lograr cualquier postura  $(x, y, \theta)$ , por lo tanto, el espacio de trabajo de un robot bicicleta también tiene  $DOF = 3$ .

Claramente, existe una relación de desigualdad en el funcionamiento en donde  $DDOF \leq \delta_M \leq DOF$ . Aunque la dimensionalidad del espacio de trabajo de un robot es un atributo importante, del ejemplo anterior se desprende claramente que las rutas particulares disponibles para un robot también son importantes. Así como el  $DOF$  del espacio de trabajo gobierna la capacidad del robot para alcanzar varias posturas, el  $DDOF$  del robot gobierna su capacidad para lograr varias rutas.

### 3.4.2 Restricciones Holonómicas y No Holonómicas

En la comunidad robótica, cuando se describe el espacio de ruta de un robot móvil, a menudo se utiliza el concepto de holonomía. El término *holonómico* tiene una amplia aplicabilidad en varias áreas matemáticas, incluidas las ecuaciones diferenciales, funciones y expresiones de restricción. En robótica móvil, el término se refiere específicamente a las restricciones cinemáticas del chasis del robot. Un *robot holonómico* es un robot que tiene cero restricciones cinemáticas no holonómicas (solo tiene restricciones cinemáticas holonómicas), por el

contrario, un **robot no holonómico** es un robot con una o más restricciones cinemáticas no holonómicas [1].

Una **restricción cinemática holonómica** se puede expresar como una función explícita dependiente únicamente de las variables de posición (lineales y angulares) o también llamadas *coordenadas generalizadas*. Por ejemplo, en el caso de un robot móvil con una sola rueda estándar fija, una restricción cinemática holonómica sería expresable usando solamente  $\alpha_1, \beta_1, l_1, \varphi_1, x, y, \theta$ ; tal restricción no puede utilizar derivadas de estos valores, tales como  $\dot{\varphi}_1, \dot{\beta}_1$  o  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$ .

El movimiento del robot puede ser representado mediante la evolución de un *vector de coordenadas generalizadas*  $\mathbf{q}$  en el tiempo y que puede estar sujeto a restricciones; dicho vector también es conocido como *vector de coordenadas de configuración*. Para un robot con  $n$  coordenadas generalizadas se puede definir el vector de coordenadas generalizadas como  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T = [{}^I\xi \ \boldsymbol{\beta}_s \ \boldsymbol{\beta}_c \ \boldsymbol{\varphi}]^T$ , en donde una sola restricción holonómica se expresa de forma general como:

$$f(\mathbf{q}) = f(q_1, q_2, \dots, q_n) = f(x, y, \theta, \beta_{s1}, \dots, \beta_{sN_s}, \beta_{c1}, \dots, \beta_{cN_c}, \varphi_1, \dots, \varphi_M) = 0 \quad (3.118)$$

donde  $f$  y sus derivadas son funciones continuas. El efecto de las restricciones holonómicas es reducir el espacio de configuraciones accesibles, por lo tanto, esta restricción define un subespacio de todas las posibles configuraciones en coordenadas generalizadas para las cuales la ecuación (3.118) es verdadera. La restricción (3.118) puede ser utilizada eliminando ciertas coordenadas generalizadas y se puede expresar mediante  $n - 1$  coordenadas restantes, en el esfuerzo por obtener un conjunto más pequeño de coordenadas generalizadas requeridas para alguna descripción del robot. En general, podemos tener  $m$  restricciones holonómicas ( $m \leq n$ ) y si estas restricciones son linealmente independientes, luego definen el subespacio de dimensión  $(n - m)$ , que es el espacio de configuración verdadero (espacio de trabajo donde el robot tendría  $n - m$  grados de libertad). La movilidad del sistema reducido así obtenido es completamente equivalente a la del mecanismo original [4].

Una **restricción cinemática no holonómica** requiere una relación diferencial, como la derivada de las variables de posición, además no se puede integrar para proporcionar una restricción solamente en términos de las variables de posición. Debido a este último punto de vista, los sistemas no holonómicos a menudo se denominan *sistemas no integrables*.

Considere la restricción de deslizamiento de la rueda estándar fija:

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)]^R \mathbf{R}_I \quad {}^I \dot{\boldsymbol{\xi}} = 0$$

Esta restricción debe usar el movimiento del robot  ${}^I \dot{\boldsymbol{\xi}}$  en lugar de la postura  ${}^I \boldsymbol{\xi}$  porque el punto es restringir el movimiento del robot perpendicular al plano de la rueda para que sea cero. La restricción no es integrable y depende explícitamente del movimiento del robot, por lo tanto, la restricción de deslizamiento es una restricción no holonómica.

La restricción no holonómica se puede reformular de forma más general de la siguiente manera:

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = f({}^I \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\varphi}, {}^I \dot{\boldsymbol{\xi}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}_s, \dot{\boldsymbol{\beta}}_c, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = 0 \quad (3.119)$$

$$f(x, y, \theta, \beta_{s1}, \dots, \beta_{sN_s}, \beta_{c1}, \dots, \beta_{cN_c}, \varphi_1, \dots, \varphi_M, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\beta}_{s1}, \dots, \dot{\beta}_{sN_s}, \dot{\beta}_{c1}, \dots, \dot{\beta}_{cN_c}, \dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_M) = 0$$

donde  $f$  es una función suave con derivadas continuas y  $\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidades del robot en las coordenadas generalizadas. En caso de que el sistema (3.119) no tenga restricciones, entonces este no tiene limitación en las direcciones de movimiento. Una restricción cinemática (3.119) es holonómica si es integrable, lo que significa que las velocidades  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  pueden eliminarse de la ecuación (3.119) y la restricción se puede expresar en la forma de la ecuación (3.118); además si la restricción (3.119) no es integrable, entonces es no holonómica. Si existen  $m$  restricciones no holonómicas linealmente independientes en la forma de la ecuación (3.119), la dimensión del espacio de velocidad es  $(n - m)$ .

Las restricciones no holonómicas restringen el movimiento instantáneo admisible del robot al reducir el conjunto de velocidades generalizadas que se pueden alcanzar en cada configuración, es decir, limitan las posibles velocidades del robot o las posibles direcciones de movimiento, pero estas restricciones no causan restricciones en su posicionamiento. Es decir, el movimiento local del robot está restringido, pero no su movimiento global. El ejemplo más familiar de un sistema no holonómico lo demuestra una maniobra de estacionamiento en paralelo, cuando un conductor llega al lado de un espacio de estacionamiento, no puede simplemente deslizar su automóvil de lado hacia ese lugar. El automóvil no es capaz de deslizarse hacia los lados y esta es la restricción de velocidad, sin embargo, moviendo el automóvil hacia adelante y hacia atrás y girando las ruedas, el automóvil se puede colocar en el espacio de estacionamiento. Ignorando las restricciones causadas por objetos externos, el automóvil puede ubicarse en cualquier posición con cualquier orientación, a pesar de la falta de movimiento lateral de las ruedas.

En conclusión, una restricción no holonómica no limita el espacio de configuraciones alcanzables (postura del robot), puesto que con el uso de diferentes herramientas de teoría de control se obtienen condiciones simples bajo las cuales una configuración arbitraria puede ser obtenida. Las restricciones no holonómicas no reducen la dimensión de las coordenadas generalizadas, sino solo la dimensión del espacio de velocidad generalizada. Las restricciones no holonómicas, por lo tanto, afectan el problema de planificación de rutas.

Se enfatiza que “holonómico” no significa necesariamente sin restricciones. Sin duda, un robot móvil sin restricciones cinemáticas no holonómicas es holonómico, pero un robot móvil capaz de realizar solo traslaciones también es holonómico. Considere una configuración bicicleta, con una rueda fija activa y una rueda orientable parcialmente activa, debido a que la restricción de deslizamiento de la rueda fija estará vigente para dicho robot, podemos concluir que la bicicleta es un robot no holonómico. Pero supongamos que bloqueemos el sistema de dirección del robot tipo bicicleta, de modo que se convierte en dos ruedas estándar fijas con ejes separados pero paralelos y sabemos que  $\delta_M = 1$  para tal configuración. ¿Es no holonómico? Aunque puede que no lo parezca debido a las restricciones de deslizamiento y rodadura, la configuración bicicleta bloqueada es realmente holonómica.

Considere el espacio de trabajo de esta configuración bicicleta bloqueada, el cual consiste en una única línea infinita a lo largo de la cual la bicicleta puede moverse (suponiendo que la dirección se haya congelado en línea recta). Para simplificar las fórmulas, suponga que esta línea infinita está alineada con el eje  $X_I$  del sistema de referencia global y que  $\beta_{1,2} = 90^\circ$ ,  $\alpha_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha_2 = 180^\circ$ , en este caso, las restricciones de deslizamiento de ambas ruedas se pueden reemplazar con un conjunto igualmente completo de restricciones en la postura del robot ( $y = 0$ ,  $\theta = 0^\circ$ ). Esto elimina dos restricciones no holonómicas, correspondientes a las restricciones de deslizamiento de las dos ruedas.

Las únicas restricciones cinemáticas no holonómicas restantes son las restricciones de rodadura para cada rueda:

$$[\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cos(\beta)]^R \mathbf{R}_I \quad {}^I \dot{\xi} - r\dot{\varphi} = 0$$

Esta restricción es necesaria para que cada rueda relacione la velocidad de giro de la rueda con la velocidad de movimiento proyectada a lo largo del plano de la rueda. Pero en el caso de nuestra configuración bicicleta bloqueada, dada la posición rotacional inicial  $\varphi_o$  de una rueda

en el origen, podemos reemplazar esta restricción con una que relacione directamente la posición en la línea  $x$ , con el ángulo de rotación  $\varphi$  de la rueda,  $\varphi = (x/r) + \varphi_o$ .

La configuración bicicleta bloqueada es un ejemplo del primer tipo de robot holonómico, donde existen restricciones, pero todas son restricciones cinemáticas holonómicas. Este es el caso de todos los robots holonómicos con  $\delta_M < 3$ . El segundo tipo de robot holonómico existe cuando no hay restricciones cinemáticas, es decir, cuando  $N_f = 0$  y  $N_s = 0$ . Dado que no hay restricciones cinemáticas, tampoco hay restricciones cinemáticas no holonómicas, por lo que dicho robot es siempre holonómico; este es el caso de todos los robots holonómicos con  $\delta_M = 3$ .

Una forma alternativa de describir un robot holonómico se basa en la relación entre los grados de libertad diferenciales del robot  $DDOF$  y los grados de libertad de su espacio de trabajo  $DOF$ : un robot es holonómico si y solo si  $DDOF = DOF$ . Intuitivamente, esto se debe a que es solo a través de restricciones no holonómicas (impuestas por ruedas estándar fijas u orientables centradas) que un robot puede alcanzar un espacio de trabajo con grados de libertad que exceden sus grados de libertad diferenciales,  $DOF > DDOF$ . Los ejemplos incluyen configuraciones de accionamiento diferencial, bicicleta, triciclo y Ackermann.

En robótica móvil, los chasis útiles generalmente deben lograr posturas en un espacio de trabajo con dimensionalidad 3, por lo que en general requerimos  $DOF = 3$  para el chasis. Pero las capacidades “holonómicas” para maniobrar alrededor de obstáculos sin afectar la orientación y para rastrear un objetivo mientras se sigue una ruta arbitraria son consideraciones adicionales importantes. Por estas razones, la forma particular de holonomía más relevante para la robótica móvil es la de  $DDOF = DOF = 3$ ; definimos esta clase de configuraciones de robot como omnidireccionales, donde un robot omnidireccional es un robot holonómico con  $DDOF = 3$ .

### 3.4.3 Consideraciones de las Rutas y Trayectorias

En robótica móvil, una *ruta* es una “línea” que un robot necesita para conducirse en el espacio de coordenadas generalizadas. Si una ruta está parametrizada con el tiempo, es decir, el movimiento a lo largo del camino tiene que estar sincronizado con el tiempo, entonces hablamos de una *trayectoria*. Siempre que se conozca de antemano el programa del movimiento

de un robot, la trayectoria de referencia del robot se puede escribir como una función del tiempo en el espacio de coordenadas generalizadas.

En robótica móvil, no solo nos preocupamos por la capacidad del robot para alcanzar las configuraciones finales requeridas, sino también por el cómo llegar allí. Considere la cuestión de la capacidad de un robot para seguir rutas: en el mejor de los casos, un robot debería poder trazar cualquier ruta a través de su espacio de trabajo de posturas. Claramente, cualquier robot omnidireccional puede hacer esto porque es holonómico en un espacio de trabajo tridimensional. Desafortunadamente, los robots omnidireccionales deben usar ruedas sin restricciones, lo que limita la elección a ruedas suecas, orientables descentradas (castores) y esféricas; estas ruedas aún no se han incorporado en diseños que permitan una mayor distancia al suelo y con buenos sistemas de suspensión. Aunque potentes desde el punto de vista del espacio de rutas y trayectorias, son mucho menos comunes que las ruedas convencionales fijas y orientables centradas, principalmente porque su diseño y fabricación son algo complejos y costosos [1].

Adicionalmente, las restricciones no holonómicas podrían mejorar drásticamente la estabilidad de los movimientos. Considere un vehículo omnidireccional conduciendo a alta velocidad en una curva con diámetro constante; durante dicho movimiento, el vehículo estará expuesto a una fuerza centrípeta no despreciable, esta fuerza lateral que empuja al vehículo fuera de la curva debe ser contrarrestada por el par motor de las ruedas omnidireccionales. En caso de falla del motor o el sistema de control, el vehículo saldrá de la curva, sin embargo, para un robot parecido a un automóvil con restricciones cinemáticas, las fuerzas laterales se contrarrestan pasivamente a través de las restricciones de deslizamiento, mitigando las demandas sobre el par motor.

Analicemos un robot de alta maniobrabilidad con ruedas convencionales como es el robot tipo bicicleta en el cual ambas ruedas son orientables centradas, a menudo llamado robot de doble direccionamiento, este vehículo alcanza un grado de direccionalidad de 2, lo que resulta en un alto grado de maniobrabilidad  $\delta_M = \delta_m + \delta_s = 1 + 2 = 3$ . Curiosamente, esta configuración no es holonómica, pero tiene un alto grado de maniobrabilidad en un espacio de trabajo con  $DOF = 3$ .

El resultado de la maniobrabilidad  $\delta_M = 3$ , significa que el robot de doble direccionamiento puede seleccionar cualquier *ICR* dirigiendo adecuadamente sus dos ruedas. Entonces, ¿cómo se compara esto con un robot omnidireccional? La capacidad de manipular su *ICR* en el plano

significa que robot puede seguir cualquier ruta en su espacio de trabajo, de manera más general, cualquier robot con  $\delta_M = 3$  puede seguir cualquier ruta desde su postura inicial hasta su postura final. Un robot omnidireccional también puede seguir cualquier ruta en su espacio de trabajo y, como era de esperarse, con un grado de movilidad  $\delta_m = 3$ , entonces su grado de maniobrabilidad es  $\delta_M = 3$ .

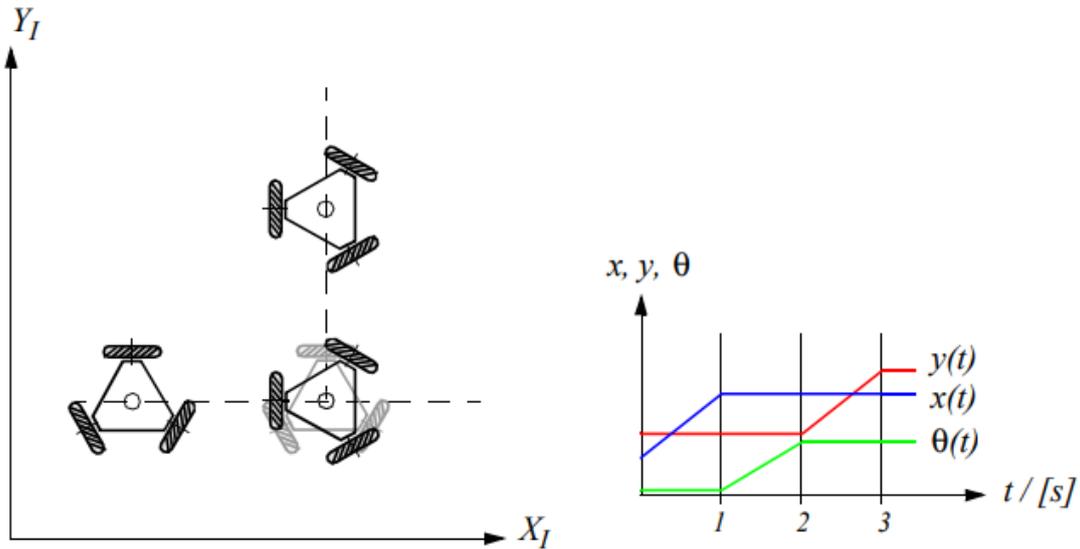
Pero todavía existe una diferencia entre el grado de libertad otorgado por la dirección versus el control directo de la velocidad de la rueda; esta diferencia es clara en el contexto de las trayectorias más que en las rutas. Una trayectoria es como una ruta, excepto que ocupa una dimensión adicional que es el tiempo, por lo tanto, para un robot omnidireccional en el plano del suelo, una ruta generalmente denota un rastro a través de un espacio 3D de postura; para el mismo robot, una trayectoria denota un rastro a través del espacio 4D de postura incluyendo a la variable tiempo.

Por ejemplo, considere una trayectoria meta en la que el robot se mueve a lo largo del eje  $X_I$  a una velocidad constante de  $1 \text{ m/s}$  durante 1 segundo, luego cambia de orientación en sentido antihorario 90 grados también en 1 segundo, y finalmente se mueve en paralelo al eje  $Y_I$  durante 1 segundo. La trayectoria deseada de 3 segundos se muestra en la Figura 3.38, utilizando gráficos de  $x$ ,  $y$  y  $\theta$  en relación con el tiempo.

¿Puede el robot omnidireccional realizar la trayectoria mostrada en la Figura 3.38? Supongamos que el robot puede alcanzar una velocidad finita arbitraria en cada rueda, por simplicidad, asumimos además que la aceleración es infinita, es decir, no se necesita tiempo para alcanzar la velocidad deseada. Bajo estos supuestos, el robot omnidireccional puede seguir la trayectoria de la Figura 3.38. La transición entre el movimiento del segundo 1 y el segundo 2, por ejemplo, implica solo cambios en las velocidades de las ruedas.

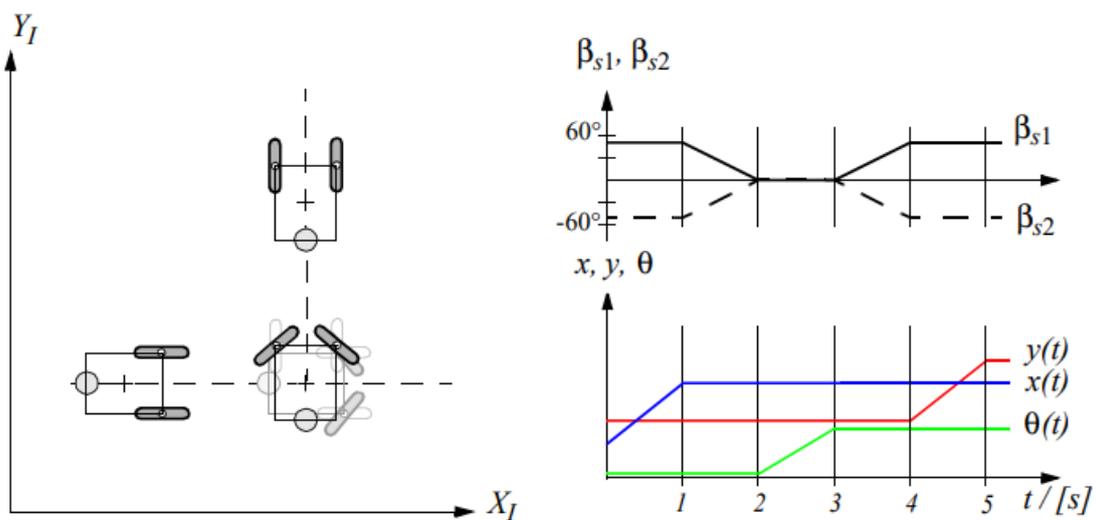
Debido a que el robot de doble direccionamiento tiene  $\delta_M = 3$ , debe poder seguir la ruta que resultaría de proyectar esta trayectoria en un espacio de trabajo temporal, sin embargo, no puede seguir esta trayectoria 4D. Incluso si la velocidad de dirección es finita y arbitraria, aunque el robot de doble direccionamiento podría cambiar esta velocidad instantáneamente, tendría que esperar a que el ángulo de las ruedas orientables centradas cambiara a la posición deseada antes de iniciar un cambio en la orientación del chasis del robot. En resumen, el robot de doble direccionamiento requiere cambios en los grados internos de libertad y dado que estos cambios llevan tiempo, no se pueden lograr trayectorias arbitrarias. La Figura 3.39 muestra la trayectoria

más similar que podría lograr el robot de doble direccionamiento; en contraste con las tres fases deseadas de movimiento, esta trayectoria tiene cinco fases.



**Figura 3.38.** Ejemplo de trayectoria de robot con robot omnidireccional [1].

El robot doble direccional de la Figura 3.39 se mueve durante 1 segundo con una velocidad constante de  $1 \text{ m/s}$  a lo largo del eje  $X_I$ ; seguidamente gira las dos ruedas orientables centradas un ángulo de  $-50$  y  $50$  grados respectivamente; luego cambia la orientación del chasis del robot en sentido antihorario con un ángulo de  $90$  grados durante 1 segundo; posteriormente gira las dos ruedas orientables centradas un ángulo de  $50$  y  $-50$  grados respectivamente; y finalmente se mueve durante 1 segundo con una velocidad constante de  $1 \text{ m/s}$  a lo largo del eje  $Y_I$ .



**Figura 3.39.** Ejemplo de una trayectoria similar a la Figura 3.38 con un robot doble direccional [1].

### 3.5 Modelo Cinemático de Configuración

Hasta ahora, solo hemos utilizado un subconjunto de las restricciones cinemáticas dadas en (3.25) y (3.27) para discutir la restricción de movilidad del robot, a saber, la parte de las restricciones de deslizamiento relativas a las ruedas convencionales y orientables centradas expresadas por (3.34) y (3.35). En el *modelo cinemático de configuración* las restricciones restantes ahora se utilizan para derivar las ecuaciones de la evolución de las velocidades de rotación  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$  y las velocidades de orientación de las ruedas orientables descentradas (castor)  $\dot{\boldsymbol{\beta}}_c$  que no fueron involucradas en el modelo cinemático de la postura (3.38b), utilizando para ello el concepto de coordenadas generalizadas. Este modelo en realidad contiene al modelo cinemático de postura analizado en el apartado 3.2.4.

Como se manifestó en la sección 3.4.2, una restricción cinemática no holonómica puede ser formulada mediante una función que involucra  $n$  coordenadas generalizadas ( $\mathbf{q}$ ) y  $n$  velocidades generalizadas ( $\dot{\mathbf{q}}$ ) dada por:

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (3.120)$$

Si esta función es integrable entonces se obtiene una expresión que determina que se trata de una restricción holonómica, lo que significa que las velocidades  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  pueden eliminarse de la ecuación (3.120),  $f(\mathbf{q}) = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ; si la formulación (3.120) no es integrable, entonces dicha función representa una restricción no holonómica. Partiendo de esta premisa, podemos asegurar que la función dada en la ecuación (3.120) contiene la información de todos los posibles parámetros que pueden generar cada una de las restricciones cinemáticas (holonómicas y no holonómicas) sobre el chasis del robot y se considera como el punto de partida para obtener una expresión general que represente el modelo cinemático del robot [4-5, 10, 14]. Para un robot con  $n$  coordenadas generalizadas se puede definir el *vector de coordenadas generalizadas* o *vector de coordenadas de configuración* como  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T = [{}^I\xi \ \boldsymbol{\beta}_s \ \boldsymbol{\beta}_c \ \boldsymbol{\varphi}]^T$  donde  ${}^I\xi = [x \ y \ \theta]^T$ , el cual permite describir completamente la posición y la configuración del robot móvil.

### 3.5.1 Representación del Modelado Cinemático en la Forma Pfaffian

Las restricciones cinemáticas generalmente se expresan en la forma de restricciones Pfaffian, lo cual supone restricciones lineales en las velocidades generalizadas  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_n]^T$ ; bajo esta consideración una sola restricción cinemática no holonómica dada por la ecuación (3.120) puede ser expresada en la forma:

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{a}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{q}) \dot{q}_j = [a_1(\mathbf{q}) \ a_2(\mathbf{q}) \ \dots \ a_n(\mathbf{q})] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = 0 \quad (3.121)$$

donde  $\mathbf{a}(\mathbf{q})$  es un vector columna de parámetros de la restricción. Para  $m$  restricciones no holonómicas, se obtiene una matriz de restricciones formada por cada vector fila linealmente independiente  $\mathbf{a}_j^T(\mathbf{q})$  con  $j = 1, 2, \dots, m$  (obtenidos a partir de la ecuación 3.121) y que es expresada de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T(\mathbf{q}) \\ \mathbf{a}_2^T(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

y todas las restricciones no holonómicas se dan en forma de matriz mediante la relación:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.123)$$

Para las  $m$  restricciones no holonómicas linealmente independientes en la forma de la ecuación (3.120), la dimensión del espacio de las velocidades generalizadas es  $(n - m)$ . Consideremos las restricciones de rodadura y deslizamiento dadas en las ecuaciones (3.25) y (3.27) para las  $M$  ruedas que puede tener un robot móvil (diferentes tipos) y coloquemos estas ecuaciones en la forma de restricciones Pfaffian separando de la ecuación (3.27) las restricciones de deslizamiento con ruedas castor y ruedas fijas/orientables centradas con lo que se obtiene:

$$\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c) {}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0} \quad (3.124)$$

$$\mathbf{C}_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c) {}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{C}_{2c} \dot{\boldsymbol{\beta}}_c = \mathbf{0} \quad (3.125)$$

$$\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) {}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0} \quad (3.126)$$

Si se considera el vector de velocidades generalizadas  $\dot{\mathbf{q}} = [{}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}_s \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}_c \quad \dot{\boldsymbol{\phi}}]^T$ , entonces el sistema de restricciones cinemáticas dado por las ecuaciones (3.124), (3.125) y (3.126) puede ser expresado mediante la relación  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  [2] como:

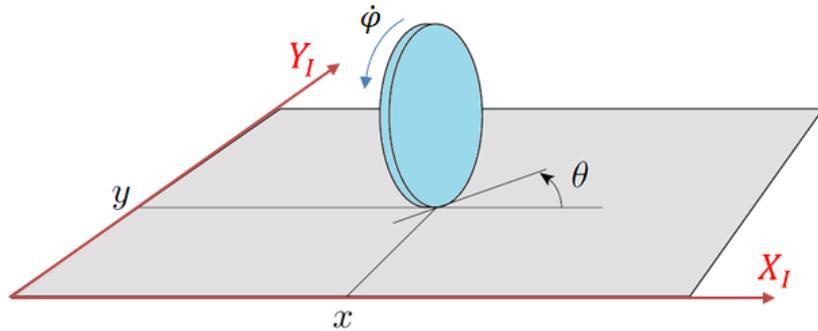
$$\begin{bmatrix} J_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c) {}^R\mathbf{R}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -J_2 \\ \mathbf{C}_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c) {}^R\mathbf{R}_I & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{2c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) {}^R\mathbf{R}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_s \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_c \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R\mathbf{R}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -J_1^{-1}J_2 \\ {}^R\mathbf{R}_I & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{1c}^{-1}\mathbf{C}_{2c} & \mathbf{0} \\ {}^R\mathbf{R}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_s \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_c \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.127)$$

De donde la matriz de restricciones cinemáticas  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  puede ser obtenida de forma general como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c) {}^R\mathbf{R}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -J_2 \\ \mathbf{C}_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c) {}^R\mathbf{R}_I & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{2c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) {}^R\mathbf{R}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c)] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -r\mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c) & {}^R\mathbf{R}_I & \mathbf{0} & d\mathbf{I} \\ \mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

La ecuación (3.127) se caracteriza por tener el mínimo número de ecuaciones  $2M$ , aportadas por las  $M$  ruedas (sin tener en cuenta posibles dependencias entre ruedas), y por tener todas las velocidades de rueda  $\dot{\boldsymbol{\delta}}$  y de postura  ${}^I\dot{\boldsymbol{\xi}}$  en un miembro de la ecuación. La expresión (3.127) permite realizar un análisis a través del concepto de espacio nulo, además que en dicha expresión puede plantearse qué variables pueden funcionar como incógnitas y cuáles pasar al otro miembro para que exista solución única, lo que implica un análisis de rango de matrices y submatrices.

Considere una rueda convencional de radio  $r$  que gira sin deslizamiento sobre el plano horizontal con una velocidad angular  $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ , mientras mantiene su plano sagital (es decir, el plano que contiene la rueda) en la dirección vertical (Figura 3.40). Su configuración se describe mediante tres coordenadas generalizadas: las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  del punto de contacto con el suelo medidas en un sistema de referencia global fijo y el ángulo  $\theta$  que caracteriza la orientación del disco con respecto al eje  $x$ . Por tanto, el vector de configuración es  $\mathbf{q} = [x \quad y \quad \theta]^T$ .



**Figura 3.40.** Coordenadas generalizadas para una rueda convencional sobre un plano.

La condición de no deslizamiento no permite a las velocidades generalizadas  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  y  $\dot{\theta}$  tomar valores arbitrarios. Debido a esta condición, las coordenadas generalizadas están restringidas por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = v \cos\theta = r \dot{\phi} \cos\theta \quad \dot{y} = v \sin\theta = r \dot{\phi} \sin\theta \quad \dot{\theta} = \omega \quad (3.129)$$

que no son integrables. Estas restricciones expresan la condición de que el vector de velocidad del centro de la rueda se encuentra en el plano medio de la rueda. Eliminando la velocidad  $v = r \dot{\phi}$  en la ecuación (3.129) da:

$$v = r \dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{\cos\theta} = \frac{\dot{y}}{\sin\theta}$$

dicha relación también puede ser expresada como

$$\dot{x} \sin\theta - \dot{y} \cos\theta = 0 \quad \text{o} \quad -\dot{x} \sin\theta + \dot{y} \cos\theta = 0 \quad (3.130)$$

Ésta es la restricción no holonómica del movimiento de la rueda, que también puede ser expresada en la forma Pfaffian  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$  usando el vector de velocidades generalizadas como

$$\dot{x} \sin\theta - \dot{y} \cos\theta = [\sin\theta \quad -\cos\theta \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.131)$$

lo cual implica que, en ausencia de deslizamiento, la velocidad del punto de contacto tiene componente cero en la dirección ortogonal al plano sagital. En cambio, la velocidad angular  $\dot{\theta}$  de la rueda alrededor del eje vertical no está restringida.

La restricción (3.131) es no holonómica, porque no implica pérdida de accesibilidad en el espacio de configuración de la rueda, es decir, la rueda puede alcanzar cualquier configuración final. Para fundamentar esta afirmación, considere que la rueda se puede conducir desde cualquier configuración inicial  $\mathbf{q}_i = [x_i \ y_i \ \theta_i]^T$  a cualquier configuración final  $\mathbf{q}_f = [x_f \ y_f \ \theta_f]^T$  a través de la siguiente secuencia de movimientos que no violan la restricción (3.131):

Paso 1: Girar la rueda alrededor de su eje vertical para alcanzar la orientación  $\theta_v$  para la cual el eje sagital (es decir, la intersección del plano sagital y el plano horizontal) pasa por el punto de contacto final  $(x_f, y_f)$ .

Paso 2: Hacer rodar la rueda en el plano con una orientación constante  $\theta_v$  hasta que el punto de contacto alcance su posición final  $(x_f, y_f)$ .

Paso 3: Girar nuevamente la rueda alrededor de su eje vertical para cambiar la orientación de  $\theta_v$  a  $\theta_f$ .

El sistema de  $m$  restricciones Pfaffian (3.123) implica que las velocidades generalizadas admisibles en cada configuración  $\mathbf{q}$  pertenecen al espacio nulo dimensional  $(n - m)$  de la matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ . Denotando por  $\{\mathbf{s}_1(\mathbf{q}), \mathbf{s}_2(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{s}_{n-m}(\mathbf{q})\}$  una base del espacio nulo  $\mathcal{N}(\mathbf{A}(\mathbf{q}))$ , las trayectorias admisibles para el sistema mecánico se pueden caracterizar como las soluciones del sistema dinámico no lineal dado por:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \sum_{j=1}^{n-m} \mathbf{s}_j(\mathbf{q}) v_j = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}(t) \quad (3.132)$$

donde  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \in R^n$  es el *vector de estado*,  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-m}]^T \in R^{n-m}$  es el *vector de entradas de control* independientes (pseudo velocidades) y  $\mathbf{S}(\mathbf{q}) = [\mathbf{s}_1(\mathbf{q}) \ \mathbf{s}_2(\mathbf{q}) \ \dots \ \mathbf{s}_{n-m}(\mathbf{q})]$  ( $m$  restricciones definen  $n - m$  direcciones alcanzables) es una matriz de direcciones de movimiento alcanzables en cada instante de tiempo. Otros autores suelen usar la notación  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{u}(t)$  [5, 10, 14],  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{u}(t)$  [2],  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\eta}(t)$  [3] o  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}(t)$  [5]; en este libro se ha optado por la nomenclatura dada en [4].

La ecuación (3.132) tiene la forma estándar del modelo cinemático de un sistema sujeto a restricciones de velocidad independientes y es conocida como el *modelo cinemático de*

*configuración*, además, se dice que el sistema no tiene deriva porque se tiene que  $\dot{\mathbf{q}} = 0$  si la entrada es cero. Los vectores columna que conforman la matriz  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  son expresados como:

$$\mathbf{s}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} s_{11}(\mathbf{q}) \\ s_{21}(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ s_{n1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} s_{12}(\mathbf{q}) \\ s_{22}(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ s_{n2}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \dots, \quad \mathbf{s}_{n-m}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} s_{1(n-m)}(\mathbf{q}) \\ s_{2(n-m)}(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ s_{n(n-m)}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

La elección de los *vectores de campo de entrada*  $\mathbf{s}_1(\mathbf{q}), \mathbf{s}_2(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{s}_{n-m}(\mathbf{q})$ , y por lo tanto de la matriz  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  no es única, en consecuencia, los componentes de  $\mathbf{v}(t)$  pueden tener diferentes significados. En general, es posible elegir la base de  $\mathcal{N}(\mathbf{A}(\mathbf{q}))$  de tal manera que los componentes  $v_j$  tengan una interpretación física, como se mostrará más adelante para algunos ejemplos de robots móviles con ruedas. En cualquier caso, el vector  $\mathbf{v}(t)$  puede no estar directamente relacionado con las entradas de control reales, que son en general fuerzas y/o momentos de torsión. Por esta razón, la ecuación (3.132) se conoce como el **modelo cinemático de configuración** o **modelo cinemático de restricciones** del robot. El producto de la matriz de restricción  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  y la matriz cinemática  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  es una matriz cero:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3.134)$$

Se puede obtener una formulación general para determinar la matriz  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  a partir de las ecuaciones de restricción cinemáticas (3.27) y (3.25); de la ecuación (3.27) solo se toma en cuenta las condiciones de no deslizamiento para las ruedas tipo castor y en base a estas dos ecuaciones se obtiene directamente que

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_c = \mathbf{C}_{2c}^{-1} \mathbf{C}_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c) {}^R \mathbf{R}_I {}^I \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.135)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c) {}^R \mathbf{R}_I {}^I \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.136)$$

Al combinar estas ecuaciones con el modelo cinemático de la postura (3.38b)  ${}^I \dot{\boldsymbol{\xi}} = ({}^R \mathbf{R}_I)^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\delta}}$ , las ecuaciones de estado para  $\boldsymbol{\beta}_c$  y  $\boldsymbol{\varphi}$  se convierten en

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_c = \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_c) \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (3.137)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_c) \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (3.138)$$

donde

$$D(\beta_c) = C_{2c}^{-1} C_{1c}(\beta_c)$$

$$E(\beta_s, \beta_c) = J_2^{-1} J_1(\beta_s, \beta_c)$$

Definiendo  $\dot{q} = [{}^I\dot{\xi} \quad \dot{\beta}_s \quad \dot{\beta}_c \quad \dot{\varphi}]^T$  como el vector de velocidades generalizadas, la evolución de las coordenadas de configuración se puede describir en la forma compacta matricial (3.132) agrupando las ecuaciones (3.38b), (3.137) y (3.138) como:

$$\begin{bmatrix} {}^I\dot{\xi} \\ \dot{\beta}_s \\ \dot{\beta}_c \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({}^R R_I)^T J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \\ D(\beta_c) J & \mathbf{0} \\ E(\beta_s, \beta_c) J & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\beta}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({}^R R_I)^T J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \\ D(\beta_c) J & \mathbf{0} \\ E(\beta_s, \beta_c) J & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\beta}_c \\ \dot{\beta}_s \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

donde  $v(t) = [\dot{\delta} \quad \dot{\beta}_s]^T$  con  $\dot{\delta} = [\dot{\varphi} \quad \dot{\beta}_c]^T$  y

$$S(q) = \begin{bmatrix} ({}^R R_I)^T J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \\ D(\beta_c) J & \mathbf{0} \\ E(\beta_s, \beta_c) J & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

En la ecuación (3.140) la matriz identidad  $I$  es de tamaño  $(N_s \times N_s)$  y existe siempre y cuando el robot móvil cuente con ruedas orientables centradas, caso contrario debe ser eliminada de la matriz junto con la fila y columna que la contiene. Si el robot no cuenta con ruedas orientables descentradas (castor) la expresión matricial  $D(\beta_c) J$  debe ser eliminada junto con la fila que la contiene. Si el robot solo tiene incorporadas ruedas convencionales (fijas) o ruedas omnidireccionales (universales o suecas) la expresión (3.140) se reduce a:

$$S(q) = \begin{bmatrix} ({}^R R_I)^T J \\ E J \end{bmatrix} \quad y \quad v(t) = \dot{\varphi} \quad (3.141)$$

Hay que enfatizar que una mayor simplificación de la ecuación (3.132) y (3.139) es de interés desde un punto de vista operativo. En el contexto de la planificación de la trayectoria o el diseño de control de realimentación, está claro que el usuario está esencialmente preocupado por controlar la postura del robot (es decir, la coordenada de postura  ${}^I\xi(t)$ ) mediante el uso de la entrada de control  $v(t)$ . Esto implica que podemos deliberadamente ignorar las coordenadas

$\beta_c$  y  $\varphi$  del vector de velocidades generalizadas  $\dot{\mathbf{q}}$  y extraer un modelo cinemático reducido (*modelo cinemático de postura*) como el determinado en la ecuación (3.38b) de la sección 3.2.4:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{z}). \mathbf{v}(t) \quad (3.142)$$

con  $\mathbf{z} = {}^I\xi = [x \ y \ \theta]^T$  y  $\mathbf{v}(t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$  en el caso de un robot con accionamiento diferencial y  $\mathbf{z} = [{}^I\xi \ \beta_s]^T = [x \ y \ \theta \ \beta_s]^T$  y  $\mathbf{v}(t) = [\dot{\boldsymbol{\varphi}} \ \dot{\boldsymbol{\beta}}_s]^T$  en el caso de un robot con configuración Ackermann [2].

Si se considera un robot móvil que solo tiene incorporadas ruedas convencionales (fijas) o ruedas omnidireccionales (universales o suecas) y además se requiere que el vector de entradas de control independientes  $\mathbf{v}(t)$  esté compuesto por las velocidades lineales y angulares del robot respecto a su sistema de referencia local ( ${}^R\dot{x}$ ,  ${}^R\dot{y}$ ,  $\dot{\theta}$ ), entonces se debe reemplazar las expresiones de (3.141) y  $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{J}^{-1} {}^R\dot{\xi}$  y en la ecuación  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}). \mathbf{v}(t)$  obteniendo:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}). \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} ({}^R\mathbf{R}_I)^T \mathbf{J} \\ \mathbf{E} \mathbf{J} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}^{-1} {}^R\dot{\xi}$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} ({}^R\mathbf{R}_I)^T \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R\dot{x} \\ {}^R\dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \text{ en donde } \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} ({}^R\mathbf{R}_I)^T \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

### 3.5.2 Modelo Cinemático del Robot Monociclo

El modelo cinemático obtenido en la ecuación (3.129) para una sola rueda convencional (Figura 3.40) también corresponde al modelo del robot monociclo el cual puede ser expresado en la forma matricial  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}). \mathbf{v}(t)$  como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta & 0 \\ r \cdot \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

donde las entradas  $v$  y  $\omega$  tienen una interpretación física clara. En particular,  $v$  es la velocidad de conducción, es decir, el módulo (con signo) del vector de velocidad del punto de contacto de la rueda ( $v = r \dot{\varphi}$ ), mientras que la velocidad de dirección  $\omega$  es la velocidad angular de la

rueda alrededor del eje vertical. Los vectores de campo de velocidades alcanzables (direcciones de movimiento) se definen como:

$$\mathbf{s}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto significa que todas las direcciones de movimiento posibles en el tiempo para la postura actual  $\mathbf{q}$  se obtienen mediante la combinación lineal

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{s}_1(\mathbf{q}) v_1 + \mathbf{s}_2(\mathbf{q}) v_2 = \mathbf{s}_1(\theta) v_1 + \mathbf{s}_2(\theta) v_2 \quad (3.145)$$

donde  $v_1$  en  $v_2$  son números reales arbitrarios que representan las entradas de control  $v$  y  $\omega$ , respectivamente. La ecuación (3.145) puede verse como una forma alternativa del modelo cinemático (3.38b). La formulación del modelo dinámico de configuración organiza los vectores de campo como dos columnas en una matriz  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  como:

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{J} = [\mathbf{s}_1(\mathbf{q}) \quad \mathbf{s}_2(\mathbf{q})] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyas columnas  $\mathbf{s}_1(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{s}_2(\mathbf{q})$  son para cada  $\mathbf{q}$  una base del espacio nulo de la matriz asociada con la restricción Pfaffian. Por tanto, todas las velocidades generalizadas admisibles en  $\mathbf{q}$  se obtienen como una combinación lineal de  $\mathbf{s}_1(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{s}_2(\mathbf{q})$ . Cada variable de acción  $v_j \in R$  en la ecuación (3.145) es en realidad un coeficiente que determina cuánto de  $\mathbf{s}_j(\mathbf{q})$  contribuye al resultado  $\dot{\mathbf{q}}$ . El vector de campo  $\mathbf{s}_1(\mathbf{q})$  del monociclo permite la *traslación pura* y el vector de campo  $\mathbf{s}_2(\mathbf{q})$  permite la *rotación pura*.

Si se considera que se trata de una rueda orientable centrada se podría añadir el ángulo de direccionamiento  $\beta$  al vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = [x \quad y \quad \theta \quad \beta]^T$ , donde las restricciones de la rueda podrían ser expresadas en la forma matricial  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}(t)$  como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta & 0 & 0 \\ r \cdot \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \omega \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

Con relación al robot monociclo con rueda convencional, si no se dan los vectores de campo  $\mathbf{s}_j(\mathbf{q})$ , se pueden obtener a partir de restricciones conocidas  $\mathbf{a}_j(\mathbf{q})$  considerando el hecho de

que las direcciones de las restricciones son ortogonales a las direcciones de movimiento, por lo que  $\mathbf{s}_j \perp \mathbf{a}_j$  ( $\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{a}_j = 0$ ). En la Figura 3.40, la restricción se puede determinar identificando las direcciones en las que el robot no puede moverse; esto es en la dirección lateral a las ruedas, donde según la ecuación (3.131) la única restricción es

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \text{ o } \mathbf{a}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}) = [\mathbf{a}^T] = [-\sin\theta \quad \cos\theta \quad 0]$$

que es perpendicular al vector de dirección de movimiento  $\mathbf{s}_1(\mathbf{q})$  (movimiento longitudinal en la dirección de rotación de las ruedas) y al vector  $\mathbf{s}_2(\mathbf{q})$  (rotación alrededor del eje normal a la superficie). Donde aplicando la relación  $[\mathbf{a}^T(\mathbf{q})] \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$  se pueden obtener las ecuaciones matriciales individuales de las restricciones de rodadura y deslizamiento, para posteriormente expresarlas de la forma (3.144) y así determinar  $\mathbf{s}_1(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{s}_2(\mathbf{q})$ .

### 3.5.3 Modelo Cinemático del Robot con Accionamiento Diferencial

Considere ahora el robot con accionamiento diferencial de la Figura 3.21, es decir, un vehículo con dos ruedas fijas principales (con radio  $r$ ) colocadas en un eje común y la velocidad de cada rueda fija está controlada por un motor independiente, además posee una rueda libre (castor o esférica) para apoyo del chasis. Una posible elección para las coordenadas generalizadas sería  $\mathbf{q} = [x \quad y \quad \theta]^T$ , donde  $(x, y)$  son las coordenadas cartesianas del origen del sistema de referencia local del robot y  $\theta$  es la orientación del vehículo con respecto al eje  $x$  del sistema de referencia global. El movimiento del vehículo está sujeto a dos restricciones de rodadura puras, una para cada rueda según las ecuaciones dadas en (3.48):

$$\dot{x} = \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_d \cos\theta + \dot{\varphi}_i \cos\theta) \quad \dot{y} = \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_d \sin\theta + \dot{\varphi}_i \sin\theta) \quad \dot{\theta} = \frac{r}{2b}(\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_i) \quad (3.147)$$

De manera análoga a la ecuación (3.144) el modelo cinemático dado por las ecuaciones en (3.147) se puede escribir en la forma matricial  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}(t)$  como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos\theta \\ \frac{r}{2} \sin\theta \\ \frac{r}{2b} \end{bmatrix} \dot{\varphi}_d + \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos\theta \\ \frac{r}{2} \sin\theta \\ -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \dot{\varphi}_i = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos\theta & \frac{r}{2} \cos\theta \\ \frac{r}{2} \sin\theta & \frac{r}{2} \sin\theta \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_d \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cos\theta & \frac{1}{2} \cos\theta \\ \frac{1}{2} \sin\theta & \frac{1}{2} \sin\theta \\ \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ v_i \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

Si se consideran  $v_1 = \dot{\varphi}_d$  y  $v_2 = \dot{\varphi}_i$  como entradas de control, los dos vectores de campo serían:

$$\mathbf{s}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos\theta \\ \frac{r}{2} \sin\theta \\ \frac{r}{2b} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos\theta \\ \frac{r}{2} \sin\theta \\ -\frac{r}{2b} \end{bmatrix}$$

El vector de campo  $\mathbf{s}_1(\mathbf{q})$  permite la rotación de la rueda derecha y el vector  $\mathbf{s}_2(\mathbf{q})$  permite la rotación de la rueda izquierda. Eliminando  $v$  en la ecuación (3.47) obtenemos como de costumbre la restricción no holonómica (3.130).

$$\dot{x} \sin\theta - \dot{y} \cos\theta = 0$$

que expresa el hecho de que el punto de origen del sistema de referencia del robot se mueve a lo largo del eje  $X_R$  y su velocidad a lo largo del eje  $Y_R$  es cero (sin movimiento lateral).

A la expresión (3.148) se le podría añadir los ángulos de rodadura  $\varphi_d$  y  $\varphi_i$  de las ruedas derecha e izquierda al vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta \ \varphi_d \ \varphi_i]^T$ , donde las restricciones del robot con accionamiento diferencial podrían ser expresadas en la forma matricial  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}(t)$  como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_d \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos\theta \\ \frac{r}{2} \sin\theta \\ \frac{r}{2b} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_d + \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos\theta \\ \frac{r}{2} \sin\theta \\ -\frac{r}{2b} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_i = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos\theta & \frac{r}{2} \cos\theta \\ \frac{r}{2} \sin\theta & \frac{r}{2} \sin\theta \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_d \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cos\theta & \frac{1}{2} \cos\theta \\ \frac{1}{2} \sin\theta & \frac{1}{2} \sin\theta \\ \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ v_i \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

La deducción de la ecuación (3.149) podría también haberse obtenido aplicando directamente la fórmula generalizada dada en (3.141) donde

$$({}^R R_I)^T J = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2}\cos\theta & \frac{r}{2}\cos\theta \\ \frac{r}{2}\sin\theta & \frac{r}{2}\sin\theta \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix}$$

$$E = J_2^{-1} J_1 = \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 & b/r \\ 1/r & 0 & -b/r \end{bmatrix}$$

$$EJ = \begin{bmatrix} 1/r & 0 & b/r \\ 1/r & 0 & -b/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reemplazando las matrices anteriores en (3.139) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_d \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2}\cos\theta & \frac{r}{2}\cos\theta \\ \frac{r}{2}\sin\theta & \frac{r}{2}\sin\theta \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_d \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

que corresponde a la misma expresión determinada en (3.149). Las restricciones no holonómicas dadas en (3.147) se pueden representar mediante la forma de Pfaffian  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$ , utilizando para ello la formulación obtenida en (3.127) y las siguientes matrices de restricción determinadas en la sección 3.2.5.1:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \end{bmatrix} \quad C_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

Al reemplazar las ecuaciones anteriores en (3.127) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} J_1 {}^R R_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -J_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_1^* {}^R R_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^I \dot{\xi} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.151)$$

Reduciendo la expresión matricial (3.151) y reemplazando los vectores  ${}^I \dot{\xi} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$ ,  $\dot{\varphi} = [\dot{\varphi}_d \ \dot{\varphi}_i]^T$  y la matriz de rotación  ${}^R R_I$  se consigue que:

$$\begin{bmatrix} [J_1] \\ [C_1^*] \end{bmatrix} {}^R R_I \begin{bmatrix} -J_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^I \dot{\xi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & b & -r & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -b & 0 & -r \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.152)$$

Las dos últimas filas de la matriz resultante proporcionan de forma repetida la ya conocida restricción no holonómica de deslizamiento  $\dot{x} \sin\theta - \dot{y} \cos\theta = 0$ , mientras que las dos primeras determinan las restricciones de rodadura de las dos ruedas del robot. Este mismo resultado se hubiese obtenido a partir de las cuatro ecuaciones de rodadura y deslizamiento de ambas ruedas obtenidas en la sección 3.2.5.1, considerando que  ${}^R\dot{\xi} = {}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\xi}$ , luego igualando cada una de ellas a cero y posteriormente realizando las operaciones matriciales correspondientes hasta alcanzar el resultado (3.152):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} {}^R\mathbf{R}_I {}^I\dot{\xi} - \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & b \\ \cos\theta & \sin\theta & -b \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Una representación más general del modelo cinemático del robot móvil con accionamiento diferencial en la forma matricial  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}(t)$  es considerando  $v_1 = v$  y  $v_2 = \omega$  como las entradas de control, donde  $v$  y  $\omega$  son las velocidades lineal y angular del robot respectivamente. Entonces, el modelo cinemático (3.144) del monociclo también se aplica al vehículo de accionamiento diferencial, siempre que las velocidades de conducción y dirección  $v$  y  $\omega$  se expresen en función de las entradas de velocidad reales, es decir, las velocidades angulares  $\dot{\phi}_d$  y  $\dot{\phi}_i$  de la rueda derecha e izquierda, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

donde

$$v = \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_i) \quad \omega = \frac{r}{2b}(\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_i) \quad (3.154)$$

Además, se debe considerar que para la expresión  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$  la matriz de coeficientes de restricción es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = [-\sin\theta \quad \cos\theta \quad 0] \quad (3.155)$$

### 3.5.4 Modelo Cinemático del Robot Bicicleta, Triciclo y Ackermann

Considere ahora un robot tipo bicicleta, es decir, un vehículo que tiene una rueda orientable y una rueda fija dispuestas como en la Figura 3.26. Una posible elección para las coordenadas generalizadas es  $\mathbf{q} = [x \quad y \quad \theta \quad \beta]^T$ , donde  $(x, y)$  son las coordenadas cartesianas del punto de contacto entre la rueda trasera y el suelo (es decir, del centro de la rueda trasera),  $\theta$  es la orientación del vehículo con respecto al eje  $X_I$  y  $\beta$  es el ángulo de dirección de la rueda delantera con respecto al vehículo. Si se considera la estructura con la rueda delantera orientable activa y la rueda trasera fija pasiva, el modelo cinemático de movimiento del chasis del robot (3.71) queda descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta \cdot \dot{\varphi}_s \quad \dot{y} = r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \cdot \dot{\varphi}_s \quad \dot{\theta} = \frac{r}{d} \sin\beta \cdot \dot{\varphi}_s \quad \dot{\beta} = \dot{\beta} \quad \dot{\varphi}_s = \dot{\varphi}_s \quad (3.156)$$

De manera análoga a las ecuaciones (3.144) y (3.148) el modelo cinemático (3.156) se puede escribir en la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\varphi}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta \\ r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \\ \frac{r}{d} \sin\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\beta} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta & 0 \\ r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta & 0 \\ \frac{r}{d} \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_s \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta \cdot \cos\theta & 0 \\ \cos\beta \cdot \sin\theta & 0 \\ \frac{1}{d} \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

Aquí, los dos vectores de campo son:

$$\mathbf{s}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta \\ r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \\ \frac{r}{d} \sin\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La deducción de la ecuación (3.157) podría habérsela llevado a cabo aplicando directamente la fórmula generalizada dada en (3.140) donde

$$({}^R\mathbf{R}_I)^T \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos\beta \\ 0 \\ \frac{r}{d} \sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta \\ r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \\ \frac{r}{d} \sin\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}_s) = \mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_s) = \frac{1}{r} [\cos\beta \quad \sin\beta \quad d \sin\beta]$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}_s) \mathbf{J} = \frac{1}{r} [\cos\beta \quad \sin\beta \quad d \sin\beta] \begin{bmatrix} r \cos\beta \\ 0 \\ \frac{r}{d} \sin\beta \end{bmatrix} = \frac{1}{r} (r \cos^2\beta + r \sin^2\beta) = 1$$

Reemplazando las matrices anteriores en (3.139) y considerando que  $\mathbf{I} = 1$  debido a que el robot solo cuenta con una rueda orientable centrada y  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_c) = \mathbf{0}$  en virtud de que el robot no cuenta con ruedas castores, se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta & 0 \\ r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta & 0 \\ \frac{r}{d} \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_s \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

que corresponde a la misma expresión determinada en (3.157). Las restricciones no holonómicas dadas en (3.156) se pueden representar mediante la forma de Pfaffian  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$ , utilizando para ello la formulación obtenida en (3.127) y las siguientes matrices de restricción determinadas en la sección 3.2.6.1:

$$\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_s) = [\cos(\beta) \quad \sin(\beta) \quad d \sin(\beta)]$$

$$\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) = \begin{bmatrix} -\sin(\beta) & \cos(\beta) & d \cos(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = [r]$$

Al reemplazar las ecuaciones anteriores en (3.127) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} J_1(\beta_s)^R R_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -J_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_1^*(\beta_s)^R R_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^I \dot{\xi} \\ \dot{\beta}_s \\ \mathbf{0} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.159)$$

Reduciendo la expresión matricial (3.159) y reemplazando los vectores  ${}^I \dot{\xi} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$ ,  $\dot{\beta}_s = [\dot{\beta}]^T$ ,  $\dot{\phi} = [\dot{\phi}_s]^T$  y la matriz de rotación  ${}^R R_I$  se consigue que:

$$\begin{bmatrix} [J_1(\beta_s)]^R R_I & \mathbf{0} & -J_2 \\ [C_1^*(\beta_s)]^R R_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^I \dot{\xi} \\ \dot{\beta}_s \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & d \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) & -d \cos(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi}_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\beta \cdot \cos\theta - \sin\beta \cdot \sin\theta & \cos\beta \cdot \sin\theta + \sin\beta \cdot \cos\theta & d \sin\beta & 0 & -r \\ \sin\beta \cdot \cos\theta + \cos\beta \cdot \sin\theta & \sin\beta \cdot \sin\theta - \cos\beta \cdot \cos\theta & -d \cos\beta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi}_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta + \theta) & \sin(\beta + \theta) & d \sin\beta & 0 & -r \\ \sin(\beta + \theta) & -\cos(\beta + \theta) & -d \cos\beta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi}_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.160)$$

El modelo cinemático de un robot tipo bicicleta con tracción de la rueda fija trasera se puede derivar a partir de las ecuaciones obtenidas en (3.80) con lo cual se obtiene:

$$\dot{x} = r \cdot \cos\theta \cdot \dot{\phi}_f \quad \dot{y} = r \cdot \sin\theta \cdot \dot{\phi}_f \quad \dot{\theta} = \frac{r}{d} \tan\beta \cdot \dot{\phi}_f \quad \dot{\beta} = \dot{\beta} \quad \dot{\phi}_f = \dot{\phi}_f \quad (3.161)$$

De manera análoga a las ecuaciones (3.144), (3.148) y (3.157) el modelo cinemático (3.161) se puede escribir en la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta \\ r \cdot \sin\theta \\ \frac{r}{d} \tan\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\phi}_f + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\beta} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta & 0 \\ r \cdot \sin\theta & 0 \\ \frac{r}{d} \tan\beta & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_f \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

Aquí, los dos vectores de campo son:

$$\mathbf{s}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta \\ r \cdot \sin\theta \\ \frac{r}{d} \tan\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La deducción de la ecuación (3.162) podría habérsela llevado a cabo aplicando directamente la fórmula generalizada dada en (3.140) donde

$$({}^R \mathbf{R}_I)^T \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos\theta \\ r \sin\theta \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}_s) = \mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_s) = \frac{1}{r} [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}_s) \mathbf{J} = \frac{1}{r} [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \frac{r}{d} \tan\beta \end{bmatrix} = 1$$

Reemplazando las matrices anteriores en (3.139) y considerando que  $\mathbf{I} = 1$  debido a que el robot solo cuenta con una rueda orientable centrada y  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_c) = \mathbf{0}$  en virtud de que el robot no cuenta con ruedas castores, se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\theta & 0 \\ r \cdot \sin\theta & 0 \\ \frac{r}{d} \tan\beta & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_f \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

que corresponde a la misma expresión determinada en (3.162). Las restricciones no holonómicas dadas en (3.161) se pueden representar mediante la forma de Pfaffian  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} =$

0, utilizando para ello la formulación obtenida en (3.127) y las siguientes matrices de restricción determinadas en la sección 3.2.6.3:

$$J_1(\beta_s) = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$C_1^*(\beta_s) = \begin{bmatrix} -\sin(\beta) & \cos(\beta) & d \cos(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = [r]$$

Al reemplazar las ecuaciones anteriores en (3.127) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} J_1(\beta_s)^R R_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -J_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_1^*(\beta_s)^R R_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^I \dot{\xi} \\ \dot{\beta}_s \\ \mathbf{0} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.164)$$

Reduciendo la expresión matricial (3.153) y reemplazando los vectores  ${}^I \dot{\xi} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta}]^T$ ,  $\dot{\beta}_s = [\dot{\beta}]^T$ ,  $\dot{\phi} = [\dot{\phi}_f]^T$  y la matriz de rotación  ${}^R R_I$  se consigue que:

$$\begin{bmatrix} [J_1(\beta_s)]^R R_I & \mathbf{0} & -J_2 \\ [C_1^*(\beta_s)]^R R_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^I \dot{\xi} \\ \dot{\beta}_s \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) & -d \cos(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi}_f \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & -r \\ \sin\beta \cos\theta + \cos\beta \cdot \sin\theta & \sin\beta \cdot \sin\theta - \cos\beta \cdot \cos\theta & -d \cos\beta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi}_f \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & -r \\ \sin(\beta + \theta) & -\cos(\beta + \theta) & -d \cos\beta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi}_f \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.165)$$

Los robots cinemáticamente equivalentes que están mecánicamente equilibrados son el robot tipo triciclo y el robot con configuración Ackermann, analizados en las secciones 3.2.7 y 3.2.8 y que se muestran respectivamente en las Figuras 3.32 y 3.33. En ambos casos, el modelo

cinemático en la forma de Pfaffian  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$  viene dado por las ecuaciones (3.160) o por (3.165) dependiendo de que la tracción esté en las ruedas delanteras o traseras. En particular,  $(x, y)$  son las coordenadas cartesianas del punto medio del eje de la rueda trasera,  $\theta$  es la orientación del robot respecto al sistema de referencia global y  $\beta$  es el ángulo de dirección.

### 3.5.5 Modelo Cinemático del Robot Omnidireccional de Cuatro Ruedas

Considere el robot móvil de cuatro ruedas de la Figura 3.36, donde se puede observar la disposición de las ruedas suecas que tienen un ángulo de rodillo  $\pm 45^\circ$ . El modelo cinemático de configuración se puede obtener aplicando la fórmula generalizada dada en (3.141) y tomando en consideración las matrices obtenidas en la sección 3.2.10 para el robot móvil omnidireccional de cuatro ruedas, de donde se deduce que:

$$\begin{aligned}
 ({}^R \mathbf{R}_I)^T \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \frac{-r}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} \end{bmatrix} \\
 ({}^R \mathbf{R}_I)^T \mathbf{J} &= \frac{-\sqrt{2}r}{4} \begin{bmatrix} -\cos(\theta + \pi/4) & \sin(\theta + \pi/4) & -\cos(\theta + \pi/4) & \sin(\theta + \pi/4) \\ \sin(\theta + \pi/4) & \cos(\theta + \pi/4) & \sin(\theta + \pi/4) & \cos(\theta + \pi/4) \\ \frac{\sqrt{2}}{2(H+W)} & \frac{-\sqrt{2}}{2(H+W)} & \frac{-\sqrt{2}}{2(H+W)} & \frac{\sqrt{2}}{2(H+W)} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{E} = \mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{J}_1 &= \frac{-1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & W+H \\ 1 & 1 & -(W+H) \\ -1 & 1 & -(W+H) \\ 1 & 1 & W+H \end{bmatrix} = \frac{-1}{r} \begin{bmatrix} -1 & 1 & W+H \\ 1 & 1 & -(W+H) \\ -1 & 1 & -(W+H) \\ 1 & 1 & W+H \end{bmatrix} \\
 \mathbf{E} \mathbf{J} &= \frac{-1}{r} \begin{bmatrix} -1 & 1 & W+H \\ 1 & 1 & -(W+H) \\ -1 & 1 & -(W+H) \\ 1 & 1 & W+H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} & \frac{1}{H+W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Reemplazando las matrices anteriores en (3.141) se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2} r \cos(\theta + \pi/4)}{4} & \frac{\sqrt{2} r \sin(\theta + \pi/4)}{4} & \frac{-\sqrt{2} r \cos(\theta + \pi/4)}{4} & \frac{\sqrt{2} r \sin(\theta + \pi/4)}{4} \\ \frac{\sqrt{2} r \sin(\theta + \pi/4)}{4} & \frac{\sqrt{2} r \cos(\theta + \pi/4)}{4} & \frac{\sqrt{2} r \sin(\theta + \pi/4)}{4} & \frac{\sqrt{2} r \cos(\theta + \pi/4)}{4} \\ \frac{r}{4(H+W)} & \frac{r}{4(H+W)} & \frac{r}{4(H+W)} & \frac{r}{4(H+W)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

El modelo de configuración obtenido en (3.166) se hubiese calculado directamente a partir de la ecuación (3.111) en donde solo bastaba agregar las velocidades generalizadas faltantes ( $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3, \dot{\phi}_4$ ) para completar el vector de velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Si se requiere que el vector de entradas de control independientes  $\mathbf{v}(t)$  esté compuesto por las velocidades lineales y angulares del robot respecto a su sistema de referencia local ( ${}^R\dot{x}, {}^R\dot{y}, \dot{\theta}$ ), entonces se debe utilizar la ecuación (3.143) para determinar  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}(t)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/r & -1/r & -(W+H)/r \\ -1/r & -1/r & (W+H)/r \\ 1/r & -1/r & (W+H)/r \\ -1/r & -1/r & -(W+H)/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R\dot{x} \\ {}^R\dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

Las restricciones no holonómicas para este robot móvil se pueden representar mediante la forma de Pfaffian  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$ , utilizando para ello la formulación obtenida en (3.127) y las siguientes matrices de restricción determinadas en la sección 3.2.10:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & W+H \\ 1 & 1 & -(W+H) \\ -1 & 1 & -(W+H) \\ 1 & 1 & W+H \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = - \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

Al reemplazar las ecuaciones anteriores en (3.127), luego reduciendo esta expresión matricial y finalmente reemplazando los vectores  ${}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$ ,  $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4]^T$  y la matriz de rotación  ${}^R\mathbf{R}_I$  se consigue que:

$$[\mathbf{J}_1 {}^R\mathbf{R}_I \quad -\mathbf{J}_2] \begin{bmatrix} {}^I\dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\sin(\theta + \pi/4) & -\sqrt{2}\cos(\theta + \pi/4) & -(W + H) & r & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}\cos(\theta + \pi/4) & -\sqrt{2}\sin(\theta + \pi/4) & (W + H) & 0 & r & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\sin(\theta + \pi/4) & -\sqrt{2}\cos(\theta + \pi/4) & (W + H) & 0 & 0 & r & 0 \\ -\sqrt{2}\cos(\theta + \pi/4) & -\sqrt{2}\sin(\theta + \pi/4) & -(W + H) & 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.168)$$

### 3.6 Dinámica de los Robots Móviles

El siguiente problema en el estudio de todo tipo de robots, después de la cinemática, es el modelado dinámico. La dinámica se ocupa de la relación entre las fuerzas/pares que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina. Por tanto, el modelo dinámico de un robot tiene por objetivo conocer la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas/pares implicadas en el mismo.

El modelado dinámico se realiza utilizando las leyes de la mecánica que se basan en los tres elementos físicos: inercia, elasticidad y fricción que están presentes en cualquier sistema mecánico real como un robot móvil con ruedas. Esto conlleva a la aparición de ecuaciones que involucran masas, aceleraciones, fuerzas, torques, entre otros elementos, lo cual constituye un modelo más preciso del robot móvil en comparación con el modelo cinemático, sin embargo, esto aumenta la complejidad del análisis matemático para la representación del sistema [1-5].

La dinámica de los robots móviles es un campo desafiante en sí mismo y ha atraído una atención considerable por parte de investigadores e ingenieros a lo largo de los años. La mayoría de los robots móviles, empleados en la práctica, utilizan ruedas convencionales y están sujetos a restricciones no holonómicas que necesitan un tratamiento especial. Los delicados problemas de estabilidad y control, que a menudo hay que afrontar en el diseño de un robot móvil, se deben a la existencia de deslizamiento longitudinal y lateral en el movimiento de las ruedas del robot móvil. El problema de la obtención del modelo dinámico de un robot es, por tanto, uno de los aspectos más complejos de la robótica, lo que ha llevado a ser obviado en numerosas ocasiones. Sin embargo, el modelo dinámico es imprescindible para conseguir los siguientes fines:

1. Simulación del movimiento del robot móvil
2. Diseño y evaluación de la estructura mecánica del robot móvil

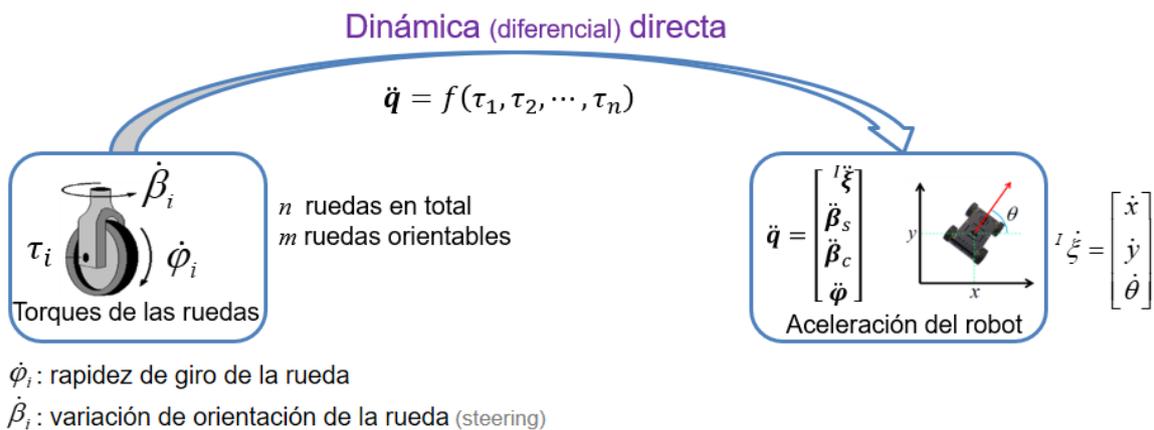
3. Dimensionamiento de los actuadores
4. Diseño y evaluación del control dinámico del robot móvil

Este último fin es evidentemente de gran importancia, pues de la calidad del control dinámico del robot depende la precisión y velocidad de sus movimientos. La gran complejidad existente en la obtención del modelo dinámico del robot móvil ha motivado que se realicen ciertas simplificaciones, de manera que pueda así ser utilizado no sólo en el diseño del controlador, sino también en línea con el control, cuando así lo requiera la técnica de control empleada.

Como se ha mencionado hasta el momento, el modelado dinámico de robots se ocupa de la derivación de las ecuaciones dinámicas del movimiento del robot. Esto se puede hacer utilizando las metodologías basadas en el método de Newton-Euler o el método de Euler-Lagrange, esta segunda alternativa es la que se va a emplear para el modelado dinámico de los robots móviles en esta sección. Al igual que en la cinemática, la dinámica se distingue en:

- Dinámica directa
- Dinámica inversa

La *dinámica directa* proporciona las ecuaciones que describen las respuestas dinámicas del robot a las fuerzas/pares que ejercen los motores sobre las ruedas. Siendo más explícitos, la dinámica directa permite determinar la evolución temporal de las aceleraciones generalizadas del robot ( $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\theta}, \ddot{\beta}_s, \ddot{\beta}_c, \ddot{\varphi}$ ), dadas las fuerzas/pares ( $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ) que ejercen los  $n$  motores sobre las ruedas (ver Figura 3.41).

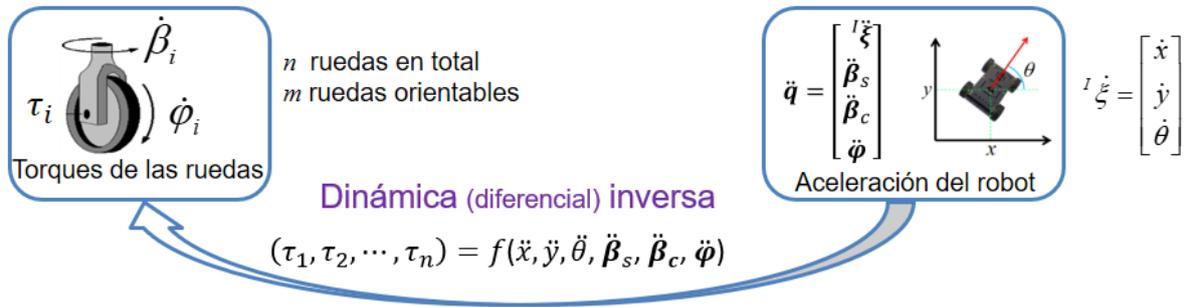


**Figura 3.41.** Representación del modelado dinámico directo de un robot móvil con ruedas.

La *dinámica inversa* proporciona las fuerzas/pares que se necesitan para obtener las trayectorias deseadas que debe recorrer el robot. Siendo más explícitos, la dinámica inversa permite determinar las fuerzas/pares  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  que se debe aplicar a los motores acoplados a las ruedas, para que el robot se mueva con una aceleración generalizada deseada  $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\theta}, \ddot{\beta}_s, \ddot{\beta}_c, \ddot{\varphi})$  (ver Figura 3.42). En el modelo dinámico inverso, las entradas son las trayectorias deseadas de las variables y las salidas son los pares del motor.

$\dot{\varphi}_i$ : velocidad de giro de la rueda

$\dot{\beta}_i$ : variación de orientación de la rueda (steering)



**Figura 3.42.** Representación del modelado dinámico inverso de un robot móvil con ruedas.

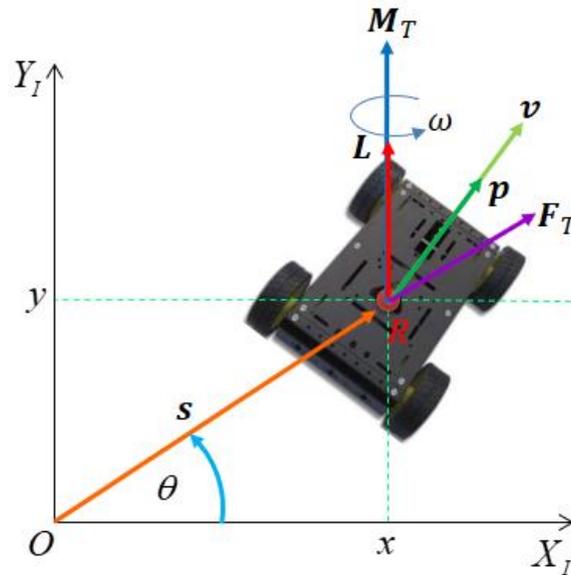
La derivación del modelo dinámico de un robot móvil es similar al caso del manipulador, siendo la principal diferencia la presencia de restricciones no holonómicas en las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ . El *modelo dinámico de configuración* constituye desde un punto de vista mecánico, la descripción completa del sistema, permitiendo relacionar las entradas de control proporcionadas por los actuadores (motores) con la evolución de las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ , en este caso utilizando el formalismo de Lagrange.

Además de las fuerzas ejercidas por los motores de las ruedas, existen dos fuerzas que influyen en la dinámica del robot. La primera es la fuerza de fricción de Coulomb  $F_C$ , la cual se genera por el contacto entre dos superficies diferentes y se opone a la dirección del movimiento generado. La segunda es la fuerza de fricción viscosa  $F_\beta$ , la cual se genera cuando un fluido se mueve con respecto a un objeto sólido, en este caso la fricción que ejerce el aire sobre la estructura mecánica del robot, esta fuerza es contraria a la dirección de la velocidad del objeto. Estas dos fuerzas se expresan en función de la velocidad lineal  $v$  del objeto y los coeficientes constantes  $C$  y  $\beta$ , respectivamente:

$$F_C = C \operatorname{sign}(v) \qquad F_\beta = \beta v \qquad (3.169)$$

### 3.6.1 Parámetros Generales para el Modelado Dinámico

Considere el robot móvil con ruedas (visto como un solo cuerpo rígido) con masa  $m$  mostrado en la Figura 3.43, el cual está ubicado a una posición  $\mathbf{s} = (x, y)$  desde el origen  $O$  del sistema de referencia global (inercial) a su centro de masa y se mueve en el plano  $xy$  con una velocidad lineal  $\mathbf{v}$  y una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  alrededor del eje inercial  $z$ .



**Figura 3.43.** Representación de los parámetros dinámicos sobre un robot móvil con ruedas.

El *momento lineal*  $\mathbf{p}$  se usa para denotar la cantidad de movimiento de traslación lineal de un objeto y se define como el producto de la masa del cuerpo y su velocidad en un instante determinado  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{s}}$ . El momento lineal es una magnitud física vectorial porque la velocidad es un vector y su dirección es a lo largo de  $\mathbf{v}$ . Puesto que el movimiento traslacional es producido por fuerzas, si la masa  $m$  es constante, se puede relacionar el momento lineal con la fuerza total  $\mathbf{F}_T$  que actúa sobre el centro de masa del robot usando la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F}_T = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\dot{\mathbf{s}})}{dt} = m\ddot{\mathbf{s}} \quad (3.170)$$

Esta última ecuación manifiesta que la fuerza neta  $\mathbf{F}_T$  aplicada a un cuerpo rígido es igual a la rapidez de cambio del momento lineal del cuerpo.

El *momento angular* o *momento cinético*  $\mathbf{L}$  representa la cantidad de movimiento de rotación de un objeto. Es una cantidad vectorial que caracteriza las propiedades de inercia de un cuerpo,

que gira en relación con cierto punto. Se define el momento angular  $\mathbf{L}$  del robot respecto al origen  $O$ , como el producto vectorial entre la posición  $\mathbf{s}$  y el momento lineal  $\mathbf{p}$ , esto es:

$$\mathbf{L} = \mathbf{s} \times \mathbf{p} = \mathbf{s} \times m\mathbf{v} \quad (3.171)$$

El vector  $\mathbf{L}$  es perpendicular al plano que contiene a  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{p}$ , en el sentido indicado por la regla del producto vectorial o regla de la mano derecha, en este caso el sentido de  $\mathbf{L}$  coincide con el eje de rotación inercial  $z$ . Reemplazando la relación  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}$  en (3.171), aplicando la propiedad del producto vectorial  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  y conociendo que el producto escalar  $\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  (por ser vectores perpendiculares) se obtiene que

$$\mathbf{L} = m \mathbf{s} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}) = m[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}) - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\omega})]$$

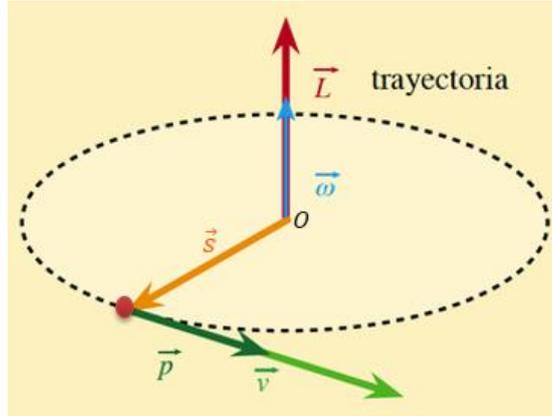
$$\mathbf{L} = m(\boldsymbol{\omega} \cdot s^2) = ms^2\boldsymbol{\omega}$$

El término escalar  $ms^2$  se denomina momento de inercia y se representa como  $J = ms^2$ , con lo cual el momento angular también se puede representar como

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega} \quad (3.172)$$

Donde hemos tenido en cuenta que la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  se considera un vector axial que es perpendicular al plano de giro y con el sentido que determine la regla de la mano derecha.

Obsérvese la analogía que hay entre la expresión  $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Como se puede deducir de las expresiones, el papel que juega el momento inercial  $J$  en el momento angular  $\mathbf{L}$  es análogo al que juega la masa inercial  $m$  en el momento lineal  $\mathbf{p}$ . En los movimientos rectilíneos, cuanto mayor sea la masa  $m$  de un cuerpo, más difícil es modificar su momento lineal. En los movimientos circulares, cuanto mayor sea el momento inercial  $J$ , más resistencia existe para modificar el estado de rotación (el momento angular). En la Figura 3.44 se muestran las relaciones vectoriales de manera geométrica cuando un sólido rígido, en este caso visto como una partícula, se mueve generando una trayectoria circular sobre el plano  $xy$ .



**Figura 3.44.** Relaciones vectoriales de los parámetros dinámicos en una trayectoria circular.

El momento angular  $L$  tiene la misma dirección que el vector velocidad angular  $\omega$  en el sentido del eje inercial  $z$ , y son denominados a veces como vectores axiales. Estos dos vectores son perpendiculares al vector posición  $s$ , el cual es un vector siempre dirigido desde el centro de giro  $O$  del sistema de referencia global (inercial) hacia el centro de masa  $R$  del cuerpo rígido. Este vector  $s$  a su vez, también es perpendicular al momento lineal  $p$  del robot que se encuentra en el mismo plano  $xy$ . Si se calcula la derivada temporal del momento angular  $L$  mediante la expresión dada en (3.171), se obtiene un resultado interesante, en efecto:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(s \times p)}{dt} = \dot{s} \times p + s \times \dot{p} = v \times p + s \times \dot{p} \quad (3.173)$$

Se sabe de antemano que  $v$  y  $p$  son paralelos por lo que su producto vectorial es nulo, es decir,  $v \times p = 0$ . En el segundo término se usa la segunda ley de Newton en la forma  $F_T = \dot{p}$ , quedando finalmente:

$$\frac{dL}{dt} = s \times F_T = M_T \quad (3.174)$$

que es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton y en donde el producto vectorial  $s \times F_T$  se lo conoce como el *torque total externo*, *torque neto externo*, *momento total de fuerzas* o *momento dinámico* y se presenta por  $M_T$ . Así la derivada temporal del momento angular  $L$  del sistema móvil es igual al momento de las fuerzas exteriores  $M_T$  que actúan sobre el cuerpo rígido para producir su movimiento rotacional, dicho de otra forma, el momento angular  $L$  del sistema móvil varía cuando sobre él actúa un momento de fuerza  $M_T$ . Hay que destacar que en

esta expresión ambos momentos  $L$  y  $M_T$  deberán estar referidos al mismo origen o centro de giro  $O$ .

El momento de fuerzas  $M_T$  es un vector perpendicular al plano  $xy$  que contiene a los vectores  $s$  y  $F_T$ , y de sentido determinado por la regla de la mano derecha. Como estamos considerando un cuerpo sólido rígido que está girando alrededor del eje principal de inercia  $z$ , entonces el momento angular puede reescribirse como  $L = J\omega$  y la ecuación (3.174) la escribimos como

$$\frac{dJ\omega}{dt} = J\dot{\omega} = M_T \quad (3.175)$$

Si el momento de fuerzas  $M_T$  debe ser utilizado de forma escalar entonces se requiere hallar su módulo, el cual se obtiene como el producto del módulo de la fuerza total  $F_T$  por el módulo del vector de posición y el seno del ángulo  $\alpha$  que forman entre ellos, donde el ángulo  $\alpha$  es medido desde el vector de posición al vector de fuerza, considerando como positivo aquel que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj:

$$M_T = |F_T| \cdot |s| \cdot \sin\alpha = F_T \cdot s \cdot \sin\alpha \quad (3.176)$$

Esta ecuación también se puede aplicar para determinar los momentos de fuerzas individuales producidos por las fuerzas externas aplicadas a cada rueda del robot, en donde el vector de posición se toma respecto al origen del sistema de referencia local del robot hacia el centro de masa de las ruedas. El momento de una fuerza individual también es conocido con el nombre de par o torque ( $\tau$ ), aunque en robótica móvil con ruedas esta identificación la reservamos cuando consideramos el movimiento rotacional de cada rueda respecto a su propio eje de giro cuya rotación es producida por el acoplamiento del eje de un motor en la rueda.

**Energía Cinética:** es la energía que posee un cuerpo a causa de su movimiento. Se trata de la capacidad o trabajo que permite que un objeto pase de estar en reposo, o quieto, a moverse a una determinada velocidad. Un objeto que esté en reposo tendrá un coeficiente de energía cinética equivalente a cero. Al ponerse en movimiento y acelerar, este objeto irá aumentando su energía cinética y, para que deje de moverse y vuelva a su estado inicial, deberá recibir la misma cantidad de energía que lo ha puesto en movimiento, pero esta vez negativa o contraria.

Para un cuerpo sólido rígido que está rotando (sistema móvil) la energía cinética total  $W_K$  puede descomponerse como dos sumas: la energía cinética de traslación  $W_{Kv}$ , que es la asociada al

desplazamiento del centro de masa del cuerpo a través del espacio y la energía cinética de rotación  $W_{K\omega}$ , que es la asociada al movimiento de rotación con cierta velocidad angular. La expresión matemática general para la energía cinética de un cuerpo que gira respecto a un sistema de referencia global está dada por:

$$W_K = W_{Kv} + W_{K\omega} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{s}}^T \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_\omega \boldsymbol{\omega} \quad (3.177)$$

Donde  $\mathbf{s}$  corresponde al vector de posición del centro de masa respecto al sistema global y para cualquier cuerpo rígido que se mueve en el plano  $xy$  está dado por  $\mathbf{s} = [x \quad y]^T$ . La derivada de este vector  $\dot{\mathbf{s}}$  es la velocidad lineal  $\mathbf{v}$  de su centro de masa y debido al hecho de que  $\dot{\mathbf{s}} = [\dot{x} \quad \dot{y}]$  entonces  $\dot{\mathbf{s}}^T \dot{\mathbf{s}} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ .

La variable  $\boldsymbol{\omega}$  es el vector de velocidad angular y para el caso de un cuerpo rígido como el de la Figura 3.43 que solo puede girar alrededor del eje inercial  $z$  con un desplazamiento angular  $\theta$  este vector es  $\boldsymbol{\omega} = [\dot{\theta}]$ . El elemento  $\mathbf{J}_\omega$  es el tensor de inercia de todo el sistema y puesto que este cuerpo rígido solo puede girar alrededor de  $z$  esta matriz corresponde solo a un escalar,  $\mathbf{J}_\omega = J$ , haciendo que el término  $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_\omega \boldsymbol{\omega}$  de la ecuación (3.177) se convierta a  $J \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} = J \dot{\theta}^2$ . Entonces para cualquier sistema móvil que se mueve en el plano  $xy$ , se tiene que la energía cinemática total puede ser determinada mediante

$$W_K = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J}{2} \dot{\theta}^2 \quad (3.178)$$

Como la energía es una cantidad escalar, la energía cinética total de cuerpos rígidos conectados es la suma de las energías cinéticas de todas sus partes móviles.

**Energía Potencial:** La energía potencial  $W_P$  es la energía que almacena un objeto y que depende de su posición con respecto a otros objetos o de que exista un campo de fuerzas dentro de él, además de otros factores. En un sistema móvil se distinguen dos tipos de energías potenciales: la energía potencial gravitacional o gravitatoria  $W_{Pw}$  que existe solo cuando el centro de masa del sistema móvil experimenta un desplazamiento vertical  $h$  ( $W_{Pw} = -mgh$ ) y la energía potencial elástica  $W_{Ps}$  producida por la amortiguación o fricción de un muelle o un elemento plástico unido al sistema móvil ( $W_{Ps} = -\frac{1}{2} k s^2$ ).

$$W_P = W_{P_W} + W_{P_S} = -\left(mgh + \frac{1}{2}ks^2\right) \quad (3.179)$$

En los robots móviles con ruedas la energía potencial  $W_P$  suele ser constante, y debido a que el movimiento del robot se limita al plano horizontal  $xy$  donde la gravedad no tiene efecto sobre la estructura se tiene que  $W_{P_W} = 0$ , además de que se considera que toda la estructura mecánica del robot es completamente rígida ( $W_{P_S} = 0$ ), entonces la energía potencial total es nula,  $W_P = 0$ .

### 3.6.2 Modelo Dinámico de un Sistema Móvil con Restricciones

El modelo cinemático solo describe la transformación estática de algunas velocidades del robot (pseudo velocidades) a las velocidades expresadas en coordenadas globales, sin embargo, el modelo de movimiento dinámico del sistema mecánico incluye propiedades dinámicas como el movimiento del sistema causado por fuerzas externas y la inercia del sistema. Utilizando la formulación de Euler-Lagrange, que es especialmente adecuada para describir los sistemas mecánicos [4], el modelo dinámico se expresa como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \tau_{d_k} = \mathcal{F}_k \quad (3.180)$$

donde el índice  $k$  describe las coordenadas generalizadas  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $\mathcal{L}$  define el Lagrangiano (diferencia entre energía cinética y potencial del sistema),  $\tau_{d_k}$  son las perturbaciones del sistema debidas a la interacción de las ruedas con el suelo u otros efectos no considerados y  $\mathcal{F}_k$  son las fuerzas netas generalizadas (influencias externas al sistema, fuerzas para el movimiento traslacional y pares para el movimiento rotacional) relacionadas con la  $q_k$  coordenada generalizada. La ecuación (3.180) es válida solo para un sistema no restringido, es decir, para el sistema sin restricciones de velocidad. Para sistemas con restricciones de movimiento, las ecuaciones de movimiento dinámico son dadas utilizando multiplicadores de Lagrange [2, 4-5, 14-16] de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \tau_{d_k} = \mathcal{F}_k - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{jk} \quad (3.181)$$

donde  $m$  es el número de restricciones de movimiento linealmente independientes,  $\lambda_j$  es el multiplicador de Lagrange asociado con la  $j$ -ésima relación de restricción y  $a_{jk}$  ( $j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n$ ) son los coeficientes de las restricciones. El conjunto final de ecuaciones consta de  $n + m$  ecuaciones diferenciales y algebraicas ( $n$  ecuaciones de Lagrange y  $m$  ecuaciones de restricciones) con  $n + m$  incógnitas ( $n$  coordenadas generalizadas  $q_k$  y  $m$  multiplicadores de Lagrange  $\lambda_j$ ). Las ecuaciones son diferenciales en las coordenadas generalizadas y algebraicas con respecto a los multiplicadores de Lagrange. Si se emplea el vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  entonces la representación de todas las ecuaciones obtenidas a partir de (3.181) queda expresada como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau}_a = \mathcal{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$$

Si en el análisis del modelo dinámico también se toma en consideración las fuerzas/pares generadas por fricciones de Coulomb y fricciones viscosas  $\mathcal{F}_{c\beta}(\dot{\mathbf{q}})$ , entonces el vector de fuerza/par neta aplicada al robot quedaría como  $\mathcal{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{F}_a(\mathbf{q}) - \mathcal{F}_{c\beta}(\dot{\mathbf{q}})$ , donde  $\mathcal{F}_a(\mathbf{q})$  es el vector de fuerza/par ejercido por los actuadores a través de las ruedas del robot. Luego el modelo Lagrangiano dado anteriormente se reformularía como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \mathcal{F}_{c\beta}(\dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_a = \mathcal{F}_a(\mathbf{q}) - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.182)$$

La función Lagrangiana o simplemente el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  está definido como la suma algebraica de la energía cinemática total  $W_K$  del sistema móvil y su energía potencial  $-W_P$  (Principio de Hamilton):

$$\mathcal{L} = W_K - W_P \quad (3.183)$$

En general, la expresión de la energía cinética total (3.177) de un sistema móvil puede reescribirse de la siguiente manera:

$$W_K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.184)$$

donde  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  es una matriz compuesta por masas e inercias y  $\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidades generalizadas compuesto por  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{p}}^T \quad \boldsymbol{\omega}^T]^T$ . Si la energía potencial  $W_P$  existe en el sistema

móvil, esta debe quedar en función de alguno de los componentes del vector de coordenadas generalizadas, es decir,  $W_P(\mathbf{q})$ . Empleando la fórmula (3.184) de la energía cinética y el Lagrangiano dado en (3.181) es posible obtener:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial W_K}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_P}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) + \frac{\partial W_P}{\partial \mathbf{q}}$$

donde

$$\frac{\partial W_K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\frac{\partial W_K}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1} \dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_n} \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = 0 \quad \frac{\partial W_P}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1} \dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_n} \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (3.185)$$

Definiéndose

$$\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1} \dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_n} \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

Empleando los resultados obtenidos en (3.185) y (3.186) junto con la formulación de Lagrange (3.182) para un sistema con restricciones de movimiento, el modelo dinámico para este tipo de sistemas puede ser expresado en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathcal{F}_{C\beta}(\dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.187)$$

Los términos  $\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$  y  $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se derivan debido a las fuerzas inerciales,  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  es el término que contiene las fuerzas debidas a la gravitación (pares gravitacionales) y el término  $\mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u}$  fue obtenido al reemplazar la igualdad del vector de fuerzas/pares  $\mathcal{F}_a(\mathbf{q}) = \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u}$ . Un aspecto importante de (3.187) es que, si se calcula la energía cinética del robot, entonces se puede obtener directamente el valor de la matriz de masas e inercias  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  y por medio de ella se puede obtener  $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  según (3.186). Además, si la matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  está compuesta por elementos constantes,  $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  será cero. Un resumen del significado de las matrices de la ecuación anterior se describe en la Tabla 3.2.

Parámetros	Descripción
$\mathbf{q}$	Vector de coordenadas generalizadas (dimensión $n \times 1$ )
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$	Matriz simétrica y definida positiva de masas e inercias (dimensión $n \times n$ )
$\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Vector de fuerzas de Coriolis y fuerzas centrífugas (dimensión $n \times 1$ )
$\mathbf{G}(\mathbf{q})$	Vector de fuerzas y pares (torques) debidos a la gravedad (dimensión $n \times 1$ )
$\boldsymbol{\tau}_d$	Vector de perturbaciones desconocidas, incluida la dinámica no modelada (dimensión $n \times 1$ )
$\mathcal{F}_a(\mathbf{q})$	Vector de fuerzas y momentos de fuerzas (pares) externos generados por los actuadores a través de las ruedas del robot (dimensión $r \times 1$ )
$\mathcal{F}_{c\beta}(\dot{\mathbf{q}})$	Vector de fuerzas y momentos de fuerzas (pares) externos generados por fricciones de Coulomb y fricciones viscosas (dimensión $r \times 1$ )
$\mathbf{E}(\mathbf{q})$	Matriz de transformación (mapeo) del espacio del actuador al espacio de coordenadas generalizadas (dimensión $n \times r$ )
$\mathbf{u}$	Vector de entradas externas, formado por los torques ejercidos sobre los ejes de las ruedas (dimensión $r \times 1$ )
$\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$	Matriz de coeficientes de restricción cinemática (dimensión $m \times n$ )
$\boldsymbol{\lambda}$	Vector de fuerzas de restricción (multiplicadores de Lagrange) (dimensión $m \times 1$ )

**Tabla 3.2.** Significado de las variables matriciales del modelo dinámico con restricciones.

Como se aprecia, el esquema del modelo dinámico presentado en (3.187) resulta muy similar al utilizado de forma habitual con los robots manipuladores. Las diferencias se encuentran en el miembro derecho de la ecuación, donde se tienen en cuenta dos hechos exclusivos de los robots móviles: no todas las ruedas tienen por qué estar actuadas, y existen restricciones holonómicas y no holonómicas al movimiento del vehículo. El primero de ellos se soluciona con la matriz  $\mathbf{E}(\mathbf{q})$ , y el segundo con la inclusión de  $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$ . En cuanto a las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ , se utiliza la posición y orientación del vehículo vistas desde el sistema global (inercial) de referencias  $\{I\}$ , es decir  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$ .

### 3.6.3 Modelo Dinámico de un Sistema Móvil en el Espacio de Estados

La ecuación (3.187) resulta incómoda de tratar y simular, debido fundamentalmente a la presencia de la matriz  $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$  y los multiplicadores lagrangianos  $\lambda$ . Por ello, también se habla del modelo dinámico en el espacio de estados de las coordenadas del robot. A partir de la expresión deducida en la ecuación (3.187), un modelo dinámico de espacio de estados para un sistema móvil con  $m$  restricciones cinemáticas puede ser derivado [4-5, 14-16]. Un sistema dinámico con  $m$  restricciones cinemáticas se describe mediante:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathcal{F}_{CB}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\lambda \quad (3.188)$$

donde la influencia de las perturbaciones desconocidas y las dinámicas no modeladas  $\tau_d$  de la ecuación (3.187) se desprecian. En otros textos la representación de la matriz  $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  también viene dada por la notación  $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ . Como ya se ha analizado en la sección 3.5.1 el modelo del movimiento cinemático del robot móvil puede ser expresado por:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \quad (3.189)$$

El modelo dinámico (3.188) y el modelo cinemático (3.189) se pueden unir en una única descripción del espacio de estado. Una descripción unificada de las restricciones no holonómicas y holonómicas se pueden encontrar en la sección 3.4.2, donde las restricciones holonómicas se expresan en forma diferencial (con velocidades) como restricciones no holonómicas.

Con el fin de obtener una notación más corta y sencilla, la dependencia de  $\mathbf{q}$  se omite en las siguientes ecuaciones, por ejemplo,  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  o  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  se escribe como  $\mathbf{M}$  o  $\mathbf{S}$ , respectivamente. La derivada de la ecuación. (3.189) es

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{S}}\mathbf{v} \quad (3.190)$$

Insertando (3.190) en la ecuación (3.188) y expresando las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  con las pseudo velocidades  $\mathbf{v}$  esta resulta en

$$\mathbf{M}\mathbf{S}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{v} + \mathbf{V} + \mathbf{G} + \mathcal{F}_{c\beta} = \mathbf{E}\mathbf{u} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} \quad (3.191)$$

La presencia de los multiplicadores lagrangianos  $\boldsymbol{\lambda}$  debido a las restricciones de movimiento puede ser eliminado considerando la relación  $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{0}$  y su transformada  $\mathbf{S}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{0}$ . Multiplicando la ecuación (3.191) por  $\mathbf{S}^T$  da como resultado un modelo dinámico reducido:

$$\mathbf{S}^T\mathbf{M}\mathbf{S}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{S}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{v} + \mathbf{S}^T\mathbf{V} + \mathbf{S}^T\mathbf{G} + \mathbf{S}^T\mathcal{F}_{c\beta} = \mathbf{S}^T\mathbf{E}\mathbf{u} \quad (3.192)$$

donde se han eliminado los multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$ . Introduciendo  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{S}^T\mathbf{M}\mathbf{S}$ ,  $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{S}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{v} + \mathbf{S}^T(\mathbf{V} + \mathbf{G} + \mathcal{F}_{c\beta})$  y  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{S}^T\mathbf{E}$  da una ecuación con una notación más simple

$$\tilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u} \quad (3.193)$$

que representa el modelo dinámico donde ahora ya no aparecen las restricciones (las restricciones están inmersas en el modelo). Esta ecuación, junto con la ecuación del modelo cinemático de configuración (3.189) constituye el *modelo dinámico de configuración* del robot. En esta formulación general (3.193) el término  $\mathbf{u}$  representa todos los pares de torsión (torques) que se pueden aplicar potencialmente para la orientación y rotación de las ruedas. En la práctica, sin embargo, solo se usa un número limitado de actuadores, lo que significa que muchos componentes de este vector son idénticamente cero.

A partir de la ecuación (3.193) el vector de pseudo aceleraciones  $\dot{\mathbf{v}}$  es expresado como:

$$\dot{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{V}}) \quad (3.194)$$

Si la condición  $\det(\tilde{\mathbf{E}}) = \det(\mathbf{S}^T \mathbf{E}) \neq 0$  es verdadera (que en la mayoría de los ejemplos realistas lo es), luego de la ecuación (3.193) el vector de entradas externas  $\mathbf{u}$  del sistema se puede expresar como

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{E}}^{-1}(\tilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{V}}) \quad (3.195)$$

Al extender el vector de estados con las pseudo velocidades  $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T \quad \mathbf{v}^T]^T$  y presentando el sistema en la forma no lineal  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u}$  (la expresión  $f(\mathbf{x})$  contiene la dependencia no lineal de los estados) la representación del modelo del sistema en el espacio de estados a partir de las ecuaciones (3.189) y (3.194) queda

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}\mathbf{v} \\ -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times r} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.196)$$

donde  $r$  es el número de entradas en el vector  $\mathbf{u}$  y el vector de estado  $\mathbf{x}$  tiene la dimensión  $(2n - m) \times 1$ . Usando el modelo inverso (3.195) se puede calcular la entrada requerida del sistema para las pseudo aceleraciones deseadas del sistema. Aplicando estas entradas a la ecuación (3.196) el modelo resultante se convierte en

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}\mathbf{v} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times (n-m)} \\ \mathbf{I}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix} \mathbf{u}_z \quad (3.197)$$

Donde el vector  $\mathbf{u}_z$  está formado por las pseudo aceleraciones del sistema. Por tanto, la relación (3.195) se puede utilizar para calcular las entradas previstas necesarias del sistema y estas entradas se pueden usar para controlar el sistema sin realimentación (control de lazo abierto) o se usan mejor como control directo (hacia adelante) en combinación con algún control realimentado.

La implementación del control de realimentación (3.195) en principio requiere la medición de  $\mathbf{v}$  y esto puede no estar disponible, sin embargo, las pseudo velocidades se pueden calcular mediante el modelo cinemático (3.189) como

$$\mathbf{v} = \mathbf{S}^+ \dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (3.198)$$

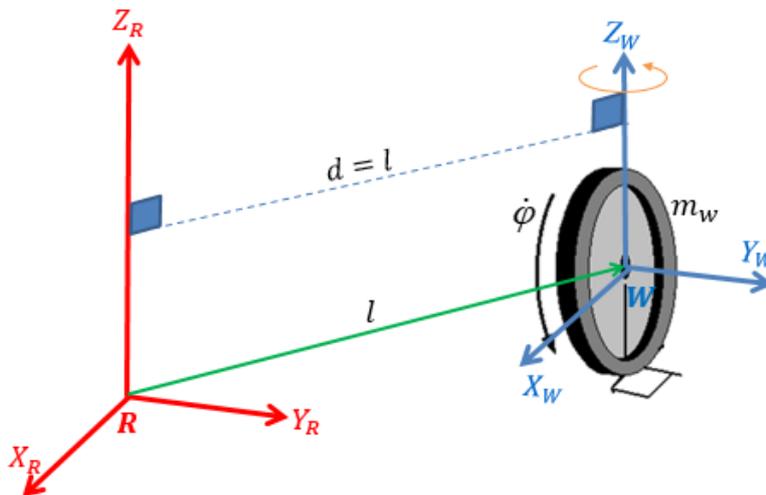
siempre que  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  puedan ser medidos. Aquí  $\mathbf{S}^+$  corresponde a la pseudo-inversa izquierda de  $\mathbf{S}$  y sustituyendo esta expresión en el término  $\dot{\mathbf{v}}$  de la ecuación (3.195) se completa el cálculo del control.

### 3.6.4 Modelo Dinámico para Robots Móviles con Ruedas

Igual como hicimos para el cálculo cinemático, supondremos que el centro de masa de un robot móvil con ruedas coincide con su centro geométrico [4-5, 18-26]. La masa del vehículo sin las ruedas (estructura mecánica) es  $m_R$  y la masa de cada una de las ruedas es  $m_w$ . El vehículo se mueve sobre el plano y el momento de inercia alrededor del eje  $Z_R$  es  $J_R$  ( $Z_R$  está en la dirección normal al plano), y el momento de inercia de cada rueda con respecto a su eje  $Y_W$  (centro de rotación en el plano de la rueda) es  $J_W$ . Para realizar el análisis dinámico se va a expresar la masa total del robot móvil como una única masa constante

$$m = m_R + Nm_w \quad (3.199)$$

donde  $N$  es el número total de ruedas. Esta misma consideración se va emplear para expresar el momento de inercia total  $J$  del robot respecto al origen de su sistema de referencia local  $\{R\}$  con  $J = J_R + N {}^R J_W$ , donde el término  ${}^R J_W$  es el momento de inercia de la rueda respecto el eje de rotación  $Z_R$ . Para determinar  ${}^R J_W$  se va a emplear el teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos, con la ayuda de la representación gráfica mostrada en la Figura 3.45.



**Figura 3.45.** Representación gráfica para la aplicación del teorema de Steiner.

Suponga que una rueda de masa  $m_w$  gira alrededor de un eje  $Z_W$  que pasa por el centro de masa de la rueda; la rueda tiene un momento de inercia de  $J_{WZ}$  con respecto a este eje. El teorema del eje paralelo establece que si se hace girar la rueda alrededor de un nuevo eje  $Z_R$ , que es paralelo al primer eje  $Z_W$  y se desplaza de él una distancia  $d$ , entonces el momento de inercia  ${}^R J_W$  con respecto al nuevo eje es relacionado con  $J_{WZ}$  por

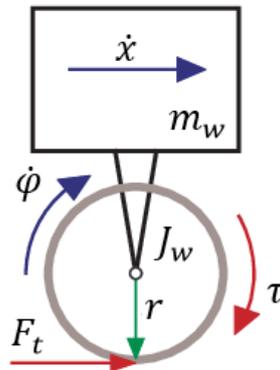
$${}^R J_W = J_{Wz} + m_w d^2$$

Explícitamente,  $d$  es la distancia perpendicular entre los ejes  $Z_W$  y  $Z_R$  y corresponde a longitud  $l$  medida desde el origen del sistema de referencia del robot al origen del sistema de referencia de la rueda,  $d = l$ . Con esta formulación se puede calcular el momento de inercia total  $J$  del robot móvil tomando en cuenta al chasis y a todas las ruedas:

$$J = J_R + N {}^R J_W = J_R + N J_{Wz} + N m_w d^2 \quad (3.200)$$

En toda la deducción del modelo dinámico del robot móvil con ruedas se va emplear los términos  $m$  y  $J$  para minimizar la complejidad de los cálculos matemáticos y una vez obtenido el modelo general se reemplazarán las expresiones derivadas de (3.199) y (3.200).

Antes de determinar el modelo dinámico completo del robot móvil con ruedas se va a iniciar explicando la dinámica de movimiento de una sola rueda acoplada al chasis del vehículo como la mostrada en la Figura 3.46. Dentro de este modelo simple no se tiene en cuenta la suspensión de la rueda ni la deflexión del neumático.



**Figura 3.46.** Modelo dinámico simple de rueda-chasis.

Para representar los efectos combinados de las restricciones de rodadura y deslizamiento de una rueda deben introducirse las fuerzas de tracción aplicadas a estas. La dinámica de traslación y rotación de una rueda (sin considerar la fricción o rozamiento con el suelo) de radio  $r$ , masa  $m_w$  y momento de inercia con respecto al centro de la rueda  $J_w$ , se puede escribir como

$$F_t = m_w \ddot{x} \quad \tau = J_w \ddot{\phi} + F_t r \quad (3.201)$$

donde  $F_t$  es la fuerza de tracción desarrollada en el contacto de la rueda,  $\ddot{x}$  y  $\ddot{\phi}$  son la aceleración lineal y angular del centro de la rueda, respectivamente, y  $\tau$  es el torque aplicado en el eje de la

rueda. Se puede observar que las dinámicas de traslación y rotación de una rueda que experimenta un movimiento de deslizamiento se acoplan a través de la fuerza de tracción  $F_t$ . Cabe señalar que el torque  $\tau$  es la única entrada independiente externa a este sistema dinámico.

Comúnmente la posición de un robot móvil con ruedas se describe mediante tres coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$  y sus entradas  $\mathbf{u}$  en el análisis dinámico corresponden a los torques transmitidos sobre los ejes de rotación de todas las ruedas.

A partir del modelo dinámico de Lagrange dado en (3.182) y (3.188) se reformularán dichas expresiones para el caso particular de cualquier robot móvil con ruedas descartando ciertos parámetros difíciles de medir (usualmente calculados de manera experimental) y parámetros que se anulan debido al propio sistema de locomoción con ruedas. Para la expresión (3.182) los términos  $\mathcal{F}_{c\beta}(\dot{\mathbf{q}})$  y  $\boldsymbol{\tau}_d$  se excluyen y se considera que no se genera energía potencial,  $W_p = 0$  (el robot se mueve en un plano horizontal). Por lo tanto,  $\mathcal{L} = W_K$  y la expresión (3.182) se reduce a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial W_K}{\partial \mathbf{q}} = \mathcal{F}_a(\mathbf{q}) - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.202)$$

La energía cinética total  $W_K$  de un robot móvil con ruedas consiste en la energía cinética generada por el conjunto de chasis y ruedas del vehículo  $W_{K1}$  debido a su traslación y rotación respecto al origen del sistema de referencia global  $\{I\}$ , así como la energía cinética de rotación de las ruedas  $W_{K2}$  respecto a su sistema de referencia local  $\{R\}$ , descartando la energía cinética adicional desarrollada por las partes móviles de los motores acoplados a las ruedas. La energía cinemática total  $W_K$  de un robot móvil con ruedas se obtiene a partir de

$$W_K = W_{K1} + W_{K2} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_1(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{J}_w \dot{\boldsymbol{\phi}}$$

$$W_K = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N J_{wi} \dot{\phi}_i^2 \quad (3.203)$$

donde  $N$  es el número total de ruedas motrices del robot,  $J_{wi}$  es la inercia alrededor del eje de rotación de cada rueda y  $\phi_i$  es la velocidad angular de cada rueda. Considerando que todas las ruedas del robot tienen la misma inercia  $J_w$  y que el vector  $\boldsymbol{\phi}$  contiene todas las velocidades angulares de las ruedas, la expresión (3.203) puede ser reescrita como:

$$W_K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{J_w}{2}\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\phi}}^2 \quad (3.204)$$

donde  $\mathbf{I}$  es a una matriz identidad de tamaño  $N \times N$ . La evaluación de la expresión (3.204) en los términos del lado izquierdo de la ecuación (3.202) para las tres componentes del vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$  permite obtener las siguientes fuerzas y torques:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{K1}}{\partial \dot{q}_1} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{K1}}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} & \frac{\partial W_{K1}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{K1}}{\partial \dot{q}_2} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{K1}}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} & \frac{\partial W_{K1}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{K1}}{\partial \dot{q}_3} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{K1}}{\partial \dot{\theta}} \right) = J\ddot{\theta} & \frac{\partial W_{K1}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{K2}}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}} \right) &= J_w \mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\phi}} & \frac{\partial W_{K2}}{\partial \boldsymbol{\phi}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.205)$$

Considerando la dinámica de rotación de una rueda dada en (3.201) y los términos obtenidos en (3.205) se puede obtener las dos siguientes formulaciones matriciales a partir de (3.202) como

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_T \end{bmatrix} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.206)$$

$$J_w \mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}_t r \quad (3.207)$$

donde

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{F}_a(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_T \end{bmatrix}$$

La dinámica de las ruedas por sí solas viene dada por (3.207). Las componentes de fuerzas globales  $F_x$  y  $F_y$  son las fuerzas de tracción aplicadas al centro de masa del robot y cada una de ellas puede ser sustituida por la suma de las componentes de las fuerzas de tracción ( $f_{tx}$  y  $f_{ty}$ ) generada por cada rueda motriz. El momento de fuerza total  $M_T$  viene dado por la suma de los momentos de fuerzas individuales de cada rueda respecto al origen del sistema de referencia

local del robot, es decir, el momento  $M_T$  se obtiene a partir de la suma de los productos de los vectores de fuerzas locales de cada rueda por las distancias medidas desde el origen del sistema de referencia local al centro de masa de cada rueda; empleando para este cálculo la ecuación (3.176). Incluyendo estos parámetros en la expresión matricial (3.206) se logra reformular el vector  $\mathcal{F}_a(\mathbf{q})$  en función del vector de fuerzas tangenciales  $\mathbf{F}_t$  como  $\mathcal{F}_a(\mathbf{q}) = r\mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{F}_t$ . Por lo tanto, la expresión (3.206) queda como:

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = r\mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{F}_t - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.208)$$

La dinámica de las ruedas individuales (3.207) se acopla con la dinámica del chasis del robot (3.208) a través de las fuerzas de tracción  $\mathbf{F}_t$ . Multiplicando (3.207) por  $\mathbf{E}(\mathbf{q})$ , luego despejando el término  $r\mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{F}_t$  y sustituyéndolo en (3.208), obtenemos el modelo dinámico completo en una única expresión:

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{J}_w\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{E}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.209)$$

A esta altura podemos hacer un cambio de variable, considerando que el vector de torques de las ruedas  $\boldsymbol{\tau}$  corresponde al vector de entradas del sistema  $\mathbf{u}$ , es decir,  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}$ . A partir del análisis del modelo cinemático de los robots móviles con ruedas se obtuvo que  $\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{E}(\mathbf{q})^T\dot{\mathbf{q}}$  y conociendo que  $\mathbf{E}(\mathbf{q})^T$  es una matriz constante, nosotros obtenemos que  $\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{E}(\mathbf{q})^T\ddot{\mathbf{q}}$ . Al sustituir esta igualdad en (3.209) y reagrupando términos, se obtiene una expresión final que corresponde a las ecuaciones dinámicas ideales de cualquier robot móvil con ruedas:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{J}_w\mathbf{I}\mathbf{E}(\mathbf{q})^T\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \\ [\mathbf{M}_1(\mathbf{q}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{q})]\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (3.210)$$

Donde

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_1(\mathbf{q}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_1(\mathbf{q}) + \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{J}_w\mathbf{I}\mathbf{E}(\mathbf{q})^T \quad (3.211)$$

La ecuación (3.210) corresponde a la ecuación matricial que representa el modelo dinámico de un robot móvil con ruedas y que coincide con la expresión (3.188), pero con los términos  $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  nulos. Como ya se mencionó anteriormente si la matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  está compuesta por elementos constantes,  $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  será cero al aplicar la relación dada en (3.186). En la práctica,

la masa de las ruedas suele ser mucho menor que la masa del chasis, por lo que la inercia de las ruedas  $J_w$  se suele despreciar y la matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  se reduce a  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_1(\mathbf{q})$ . Esto conlleva a suponer que la energía cinemática total  $W_K$  del robot móvil con ruedas solo va a depender de la energía cinética de la estructura del vehículo  $W_{K1}$ , es decir,  $W_K = W_{K1}$ .

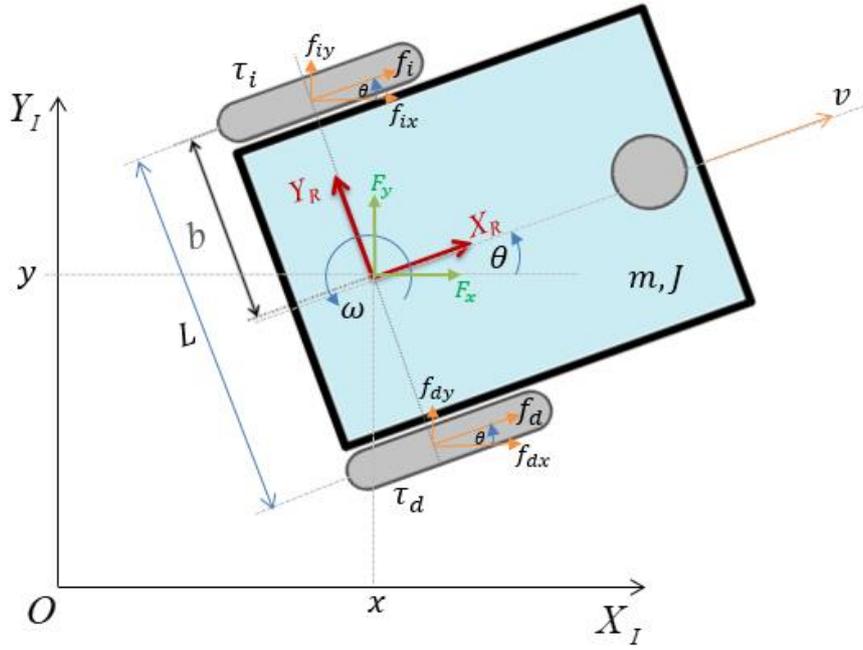
Si de antemano se conoce el modelo cinemático del robot móvil con ruedas, la matriz de transformación del espacio articular al espacio de coordenadas generalizadas  $\mathbf{E}(\mathbf{q})$  puede ser determinada en función del análisis realizado en la sección 3.2.4 empleando para ello la matriz jacobiana inversa  $\mathbf{J}^{-1}$  y la matriz de rotación  ${}^R\mathbf{R}_I$ . La matriz  $\mathbf{E}(\mathbf{q})$  se determina a partir de la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}) = (\mathbf{J}^{-1} {}^R\mathbf{R}_I)^T = ({}^R\mathbf{R}_I)^T (\mathbf{J}^{-1})^T \quad (3.212)$$

### 3.6.5 Modelo Dinámico del Robot Diferencial

El robot con configuración diferencial de la Figura 3.47 tiene dos ruedas generalmente accionadas por motores eléctricos. Igual como hicimos para el cálculo cinemático, supondremos que el centro de masa del vehículo coincide con su centro geométrico, además se considera que la masa de la estructura mecánica del robot es  $m_R$  y que el vehículo se mueve en el plano con un momento de inercia  $J_R$  alrededor del eje  $z$ . Para el análisis matemático se considera también las masas  $m_w$  y las inercias  $J_{wz}$  de las ruedas, las cuales ya se encuentran tomadas en consideración en los parámetros totales  $m$  y  $J$  del robot, según se explicó en el apartado anterior.

El movimiento del robot móvil quedará descrito mediante el vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = [x \quad y \quad \theta]^T$  y su vector de entrada  $\mathbf{u}$  está compuesto por el torque en la rueda izquierda y derecha,  $\tau_i$  y  $\tau_d$ , respectivamente, como se muestran en la Figura 3.47.



**Figura 3.47.** Geometría de un robot con accionamiento direccional para el cálculo dinámico.

En el análisis realizado en la sección 3.5.3 se obtuvo una representación general del modelo cinemático de configuración del robot móvil con accionamiento diferencial en la forma matricial  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}(t)$  considerando que  $v_1 = v$  y  $v_2 = \omega$  son las entradas de control, donde  $v$  y  $\omega$  corresponden a las velocidades lineal y angular del robot respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\theta \\ v \sin\theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.213)$$

donde

$$v = \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_i) \quad \omega = \frac{r}{2b}(\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_i) \quad (3.214)$$

Además, se debe considerar que para la expresión  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$  la matriz de coeficientes de restricción es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = [-\sin\theta \quad \cos\theta \quad 0] \quad (3.215)$$

Como el vector de coordenadas generalizadas está formado por tres elementos, entonces se formularán inicialmente tres ecuaciones empleando el modelo Lagrangiano obtenido en (3.202) y la metodología analizada en (3.205) que es válida para cualquier robot móvil con ruedas.

Considerando también la disposición de las fuerzas mostrada en la Figura 3.47 y los elementos de la matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ , se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales (una por cada componente del vector de coordenadas generalizadas):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda_1 \sin\theta \\ m\ddot{y} &= F_y - \lambda_1 \cos\theta \\ J\ddot{\theta} &= M_T \end{aligned} \quad (3.216)$$

Donde  $F_x$  y  $F_y$  son las fuerzas de tracción aplicadas al centro de masa del chasis del robot en los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente, que resultan de la interacción de las fuerzas ejercidas por los motores sobre la rueda derecha ( $f_d$ ) e izquierda del robot ( $f_i$ ). A partir de la Figura 3.47 y considerando la relación del torque de cada rueda  $\tau = rf$  respecto a su propio sistema de referencia se obtiene que

$$\begin{aligned} F_x &= f_{dx} + f_{ix} = f_d \cos\theta + f_i \cos\theta = \frac{\cos\theta}{r} \tau_d + \frac{\cos\theta}{r} \tau_i \\ F_y &= f_{dy} + f_{iy} = f_d \sin\theta + f_i \sin\theta = \frac{\sin\theta}{r} \tau_d + \frac{\sin\theta}{r} \tau_i \end{aligned} \quad (3.217)$$

En la ecuación anterior  $\tau_d$  y  $\tau_i$  corresponden a los torques aplicados a los ejes de la rueda derecha e izquierda, respectivamente. El momento de fuerza total  $M_T$  del robot está dado por la suma de los momentos de fuerzas individuales de la rueda derecha e izquierda, respecto al origen del sistema de referencia local del robot. Empleando la ecuación (3.176) para cada momento de fuerza de las ruedas se obtiene:

$$\begin{aligned} M_T &= M_d + M_i = f_d b \sin(90^\circ) + f_i b \sin(-90^\circ) = f_d b - f_i b = \frac{L}{2} f_d - \frac{L}{2} f_i \\ M_T &= \frac{b}{r} \tau_d - \frac{b}{r} \tau_i = \frac{L}{2r} \tau_d - \frac{L}{2r} \tau_i \end{aligned} \quad (3.218)$$

donde  $L$  es la distancia entre las dos ruedas ( $L = 2b$ ). Reemplazando (3.218) y (3.217) en (3.216) se obtiene las ecuaciones finales que representan el modelo dinámico final del robot:

$$m\ddot{x} = f_d \cos\theta + f_i \cos\theta + \lambda_1 \sin\theta \quad (3.219)$$

$$m\ddot{y} = f_d \sin\theta + f_i \sin\theta - \lambda_1 \cos\theta$$

$$J\ddot{\theta} = \frac{L}{2}f_d - \frac{L}{2}f_i$$

Representando las ecuaciones de (3.219) en la forma matricial (3.208) se obtiene

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = r \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d \\ f_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1 \quad (3.220)$$

Donde las matrices están dadas por

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(\mathbf{q}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} f_d \\ f_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

A partir de estas matrices y con la ecuación (3.211) se puede determinar  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \mathbf{M}_1(\mathbf{q}) + \mathbf{E}(\mathbf{q})J_w\mathbf{I}\mathbf{E}(\mathbf{q})^T \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_w & 0 \\ 0 & J_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} 2J_w \cos^2\theta & J_w \sin(2\theta) & 0 \\ J_w \sin(2\theta) & 2J_w \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_w L^2}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m + \frac{2J_w \cos^2\theta}{r^2} & \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & 0 \\ \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & m + \frac{2J_w \sin^2\theta}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{J_w L^2}{2r^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con las matrices obtenidas hasta el momento se puede expresar el modelo dinámico completo del robot móvil diferencial según la expresión  $\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\lambda$  dada en (3.210):

$$\begin{bmatrix} m + \frac{2J_w \cos^2 \theta}{r^2} & \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & 0 \\ \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & m + \frac{2J_w \sin^2 \theta}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{J_w L^2}{2r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1$$

Ahora se va a determinar el modelo de espacio de estados común (3.196) que incluye tanto al modelo cinemático como al dinámico en una única expresión matricial a partir de las siguientes matrices

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m + \frac{2J_w \cos^2 \theta}{r^2} & \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & 0 \\ \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & m + \frac{2J_w \sin^2 \theta}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{J_w L^2}{2r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m + \frac{2J_w}{r^2} & 0 \\ 0 & J + \frac{J_w L^2}{2r^2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{S}^T \mathbf{E} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{mr^2 + 2J_w} & 0 \\ 0 & \frac{2r^2}{J_w L^2 + 2Jr^2} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{L} \\ \frac{r}{2} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{r^2}{mr^2 + 2J_w} & 0 \\ 0 & \frac{2r^2}{J_w L^2 + 2Jr^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{mr^2 + 2J_w} & \frac{r}{mr^2 + 2J_w} \\ \frac{rL}{J_w L^2 + 2Jr^2} & \frac{-rL}{J_w L^2 + 2Jr^2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{S}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m + \frac{2J_w \cos^2 \theta}{r^2} & \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & 0 \\ \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & m + \frac{2J_w \sin^2 \theta}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{J_w L^2}{2r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y según la ecuación (3.196) el sistema se puede escribir en forma de espacio de estado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ , donde el vector de estado es  $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T \quad \mathbf{v}^T]^T$ , con lo cual el modelo resultante es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}v \\ -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\theta \\ v \sin\theta \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r & r \\ \frac{mr^2 + 2J_w}{J_w L^2 + 2Jr^2} & \frac{mr^2 + 2J_w}{J_w L^2 + 2Jr^2} \\ rL & -rL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} \quad (3.221)$$

Esta expresión matricial describe el movimiento completo del robot móvil con accionamiento diferencial. Si solo se desea expresar el modelo dinámico directo debería emplearse la ecuación (3.194). El modelo dinámico del robot puede ser expandido si se toma en consideración todas las masas e inercias que conforman al robot (chasis y ruedas); al reemplazar en (3.221) las relaciones dadas en (3.199) y (3.200) se obtiene un modelo dinámico más extenso:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{(m_R + 2m_w)r^2 + 2J_w} & \frac{r}{(m_R + 2m_w)r^2 + 2J_w} \\ \frac{rL}{J_w L^2 + 2r^2 \left( J_R + 2J_{wz} + \frac{m_w L^2}{2} \right)} & \frac{-rL}{J_w L^2 + 2r^2 \left( J_R + 2J_{wz} + \frac{m_w L^2}{2} \right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} \quad (3.222)$$

En la práctica las masas de las ruedas son mucho más pequeñas que la masa del chasis, así que están son despreciadas incluyendo sus momentos de inercias ( $m_w = 0, J_w = 0, J_{wz} = 0$ ). Bajo esta premisa el modelo dinámico dado en (3.22) puede ser reducido eliminando los parámetros antes mencionados, con lo cual se obtiene el siguiente modelo directo más sencillo:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_R r} & \frac{1}{m_R r} \\ \frac{L}{2J_R r} & \frac{-L}{2rJ_R r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} \quad (3.223)$$

De esta expresión se obtiene que:

$$\dot{v} = \frac{1}{m_R r} (\tau_d + \tau_i) \quad \dot{\omega} = \frac{L}{2rJ_R} (\tau_d - \tau_i) \quad (3.224)$$

El modelo dinámico inverso del robot móvil con accionamiento diferencial se obtiene teniendo en cuenta la ecuación (3.195) y considerando que  $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$  con lo cual

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{E}}^{-1}(\tilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{V}}) = \tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{L} \\ \frac{r}{2} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m + \frac{2J_w}{r^2} & 0 \\ 0 & J + \frac{J_w L^2}{2r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2 + 2J_w}{2r} \dot{v} + \frac{J_w L^2 + 2Jr^2}{2Lr} \dot{\omega} \\ \frac{mr^2 + 2J_w}{2r} \dot{v} - \frac{J_w L^2 + 2Jr^2}{2Lr} \dot{\omega} \end{bmatrix} \quad (3.225)$$

Expandiendo la expresión (3.225) mediante (3.199) y (3.200) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(m_R + 2m_w)r^2 + 2J_w}{2r} \dot{v} + \frac{J_w L^2 + 2r^2 \left( J_R + 2J_{wz} + \frac{m_w L^2}{2} \right)}{2Lr} \dot{\omega} \\ \frac{(m_R + 2m_w)r^2 + 2J_w}{2r} \dot{v} - \frac{J_w L^2 + 2r^2 \left( J_R + 2J_{wz} + \frac{m_w L^2}{2} \right)}{2Lr} \dot{\omega} \end{bmatrix} \quad (3.226)$$

Si no se toma en consideración las masas y los momentos de inercias de las ruedas ( $m_w = 0$ ,  $J_w = 0$ ,  $J_{wz} = 0$ ), se obtiene el siguiente modelo dinámico inverso más sencillo:

$$\begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_R r}{2} \dot{v} + \frac{J_R r}{L} \dot{\omega} \\ \frac{m_R r}{2} \dot{v} - \frac{J_R r}{L} \dot{\omega} \end{bmatrix} \quad (3.227)$$

De donde se obtiene que

$$\tau_d = \frac{m_R r}{2} \dot{v} + \frac{J_R r}{L} \dot{\omega} \quad \tau_i = \frac{m_R r}{2} \dot{v} - \frac{J_R r}{L} \dot{\omega} \quad (3.228)$$

Usando el modelo inverso, los torques de entrada requeridos para las ruedas se pueden obtener a partir de las velocidades y aceleraciones conocidas del robot. Los torques de entrada obtenidos se pueden aplicar en un sistema de control de lazo abierto o mejor como una parte de avance en un control de lazo cerrado. El modelo dinámico inverso reducido para el robot móvil con configuración diferencial en (3.228) también puede ser obtenido en función de las aceleraciones angulares de las ruedas utilizando para ello las relaciones dadas en (3.214) con lo cual se obtiene:

$$\tau_d = \left[ \frac{m_R r^2}{4} + \frac{J_R r^2}{L^2} \right] \ddot{\phi}_d + \left[ \frac{m_R r^2}{4} - \frac{J_R r^2}{L^2} \right] \ddot{\phi}_i \quad (3.229)$$

$$\tau_i = \left[ \frac{m_R r^2}{4} - \frac{J_R r^2}{L^2} \right] \ddot{\phi}_d + \left[ \frac{m_R r^2}{4} + \frac{J_R r^2}{L^2} \right] \ddot{\phi}_i$$

Ya en este punto final, se debe mencionar que la matriz  $\mathbf{E}(\mathbf{q})$  también pudo haberse obtenido a partir de la expresión dada en (3.212) siempre y cuando se hubiese obtenido previamente el modelo cinemático del robot (sección 3.2.5), así entonces se tiene que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}) = ({}^R \mathbf{R}_I)^T (\mathbf{J}^{-1})^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/r & 0 & b/r \\ 1/r & 0 & -b/r \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ b & -b \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

El determinar la matriz  $\mathbf{E}(\mathbf{q})$  sin necesidad de volver a dibujar y analizar la geometría del robot considerando las fuerzas y momento de fuerzas que sobre el actúan, permite disminuir el cálculo matemático en el modelo dinámico. En la Figura 3.48 se presenta el código desarrollado en Matlab para determinar las expresiones matemáticas de la dinámica directa e inversa de un robot diferencial partiendo de las ecuaciones encontradas en esta sección.

```

%Creación de variables simbólicas
syms m J mR JR r L v w dv dw Jw theta Td Ti dFIid dFIi ddFIid ddFIi

%Declaración de vectores y matrices iniciales
S=[cos(theta) 0;sin(theta) 0;0 1]
E=(1/r)*[cos(theta) cos(theta);sin(theta) sin(theta);L/2 -L/2]
JW=Jw*eye(2) %matriz diagonal de inercias de las ruedas
T=[Td;Ti]; %vector de torques de las ruedas
M1=[m 0 0;0 m 0;0 0 J]

%Matrices intermedias que componen el modelo dinámico
M2=simplify(E*JW*E.')
M=simplify(M1+M2)
Mraya=simplify(S.'*M*S)
invMraya=inv(Mraya)
Eraya=simplify(S.*E)
invEraya=inv(Eraya)
invMraya_Eraya=simplify(invMraya*Eraya)
Vel=[v;w]; % vector de velocidades del robot
Vraya=simplify(S.'*M*diff(S)*Vel)
invMraya_Vraya=simplify(invMraya*Vraya)

%Modelo dinámico directo e inverso completo
dvfinal=simplify(-invMraya*Vraya+(invMraya*Eraya)*T)
dVel=[dv;dw]; % vector de aceleraciones del robot
u=simplify(invEraya*(Mraya*dVel+Vraya))

%Modelo dinámico directo e inverso simplificado
Jw=0; m=mR; J=JR; %Inercias y masas de las ruedas despreciables
dvfinalsimple=simplify(eval(dvfinal)) %dinámica directa simple
usimple=simplify(eval(u)) %dinámica inversa simple

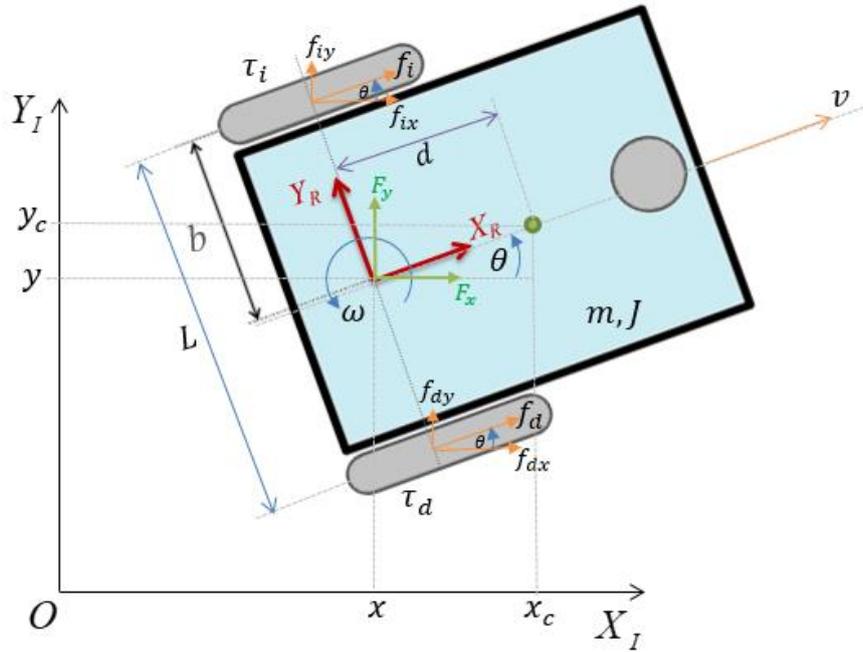
%Modelo dinámico inverso en función de las velocidades y aceleraciones
de las ruedas
v=(r/2)*(dFIid+dFIi);
w=(r/L)*(dFIid-dFIi);
dv=(r/2)*(ddFIid+ddFIi);
dw=(r/L)*(ddFIid-ddFIi);
usimple_ruedas=simplify(eval(usimple))

```

**Figura 3.48.** Código en Matlab para determinar el modelo dinámico de un robot diferencial.

### 3.6.6 Modelo Dinámico Alternativo del Robot Diferencial

Ahora vamos a derivar el modelo cinemático y dinámico para el robot móvil con configuración diferencial, pero considerando que las coordenadas del centro de masa  $(x_c, y_c)$  no coinciden con las coordenadas del centro geométrico  $(x, y)$  y que están separados por una distancia  $d$ , según se puede observar en la Figura 3.49.



**Figura 3.49.** Geometría de un robot con accionamiento direccional con diferentes coordenadas de centro de masa y centro geométrico.

Considerando la transformación entre el centro geométrico y el centro de masa  $x = x_c - d\cos\theta$  e  $y = y_c - d\sin\theta$  y sus derivadas temporales  $\dot{x} = \dot{x}_c + d\dot{\theta}\sin\theta$  e  $\dot{y} = \dot{y}_c - d\dot{\theta}\cos\theta$  y posteriormente insertando estas derivadas al modelo cinemático dado en (3.213) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\theta & \dot{y} &= v\sin\theta \\ \dot{x}_c + d\sin\theta\dot{\theta} &= v\cos\theta & \dot{y}_c - d\cos\theta\dot{\theta} &= v\sin\theta \\ \dot{x}_c &= \cos\theta v - d\sin\theta\dot{\theta} & \dot{y}_c &= \sin\theta v + d\cos\theta\dot{\theta} \end{aligned}$$

El modelo cinemático final para el centro de masa expresado en forma matricial a partir de estas ecuaciones y conociendo que  $\dot{\theta} = \omega$  se puede colocar como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -d\sin\theta \\ \sin\theta & d\cos\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\theta \\ v \sin\theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -d\sin\theta \\ \sin\theta & d\cos\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.230)$$

donde

$$v = \frac{r}{2}(\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_i) \quad \omega = \frac{r}{2b}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}_i)$$

Como ya se ha analizado en apartados anteriores las restricciones cinemáticas del robot móvil diferencial pueden ser representadas mediante la igualdad  $-\dot{x}_c \sin\theta + \dot{y}_c \cos\theta = 0$ . Expresando esta ecuación en las coordenadas del centro de masa se obtiene:

$$\begin{aligned} -(\dot{x}_c + d\dot{\theta}\sin\theta)\sin\theta + (\dot{y}_c - d\dot{\theta}\cos\theta)\cos\theta &= 0 \\ \dot{x}_c \sin\theta + \dot{y}_c \cos\theta - d\dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.231)$$

Expresando la ecuación (3.231) en la forma matricial  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$ , se puede obtener la matriz de coeficientes de restricción  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  como:

$$\begin{aligned} [-\sin\theta \quad \cos\theta \quad -d] \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= 0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{q}) &= [-\sin\theta \quad \cos\theta \quad -d] \end{aligned} \quad (3.232)$$

El vector de coordenadas generalizadas está formado por los tres elementos del centro de masa  $\mathbf{q} = [\dot{x}_c \quad \dot{y}_c \quad \dot{\theta}]^T$ , por lo cual se formularán inicialmente tres ecuaciones empleando el modelo Lagrangiano obtenido en (3.202) y la metodología analizada en (3.205). Considerando también la disposición de las fuerzas mostrada en la Figura 3.49 y los elementos de la matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ , se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= F_x + \lambda_1 \sin\theta \\ m\ddot{y}_c &= F_y - \lambda_1 \cos\theta \\ J\ddot{\theta} &= M_T + \lambda_1 d \end{aligned} \quad (3.233)$$

A partir de la Figura 3.49 se puede deducir las siguientes formulaciones:

$$\begin{aligned}
F_x &= f_{dx} + f_{ix} = f_d \cos\theta + f_i \cos\theta \\
F_y &= f_{dy} + f_{iy} = f_d \sin\theta + f_i \sin\theta \\
M_T &= M_d + M_i = f_d b - f_i b
\end{aligned} \tag{3.234}$$

Reemplazando (3.234) en (3.233) se obtiene las ecuaciones finales que representan el modelo dinámico final del robot:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_c &= f_d \cos\theta + f_i \cos\theta + \lambda_1 \sin\theta \\
m\ddot{y}_c &= f_d \sin\theta + f_i \sin\theta - \lambda_1 \cos\theta \\
J\ddot{\theta} &= \frac{L}{2} f_d - \frac{L}{2} f_i + \lambda_1 d
\end{aligned} \tag{3.235}$$

Representando las ecuaciones de (3.235) en la forma matricial (3.208) se obtiene

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = r \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d \\ f_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ -d \end{bmatrix} \lambda_1 \tag{3.236}$$

Como se puede observar, la expresión matricial (3.236) es parecida a la obtenida para el robot móvil cuyo centro de masa coincidía con su centro geométrico (3.220), con la diferencia de que el vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  esta función de las componentes del centro de masa y que la matriz  $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$  también se ha modificado. Por lo tanto, las matrices y vectores  $\mathbf{M}_1(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{F}_t$  y  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  son los mismos que a los obtenidos anteriormente, con lo cual la siguiente formulación para la expresión  $\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$  puede ser utilizada:

$$\begin{bmatrix} m + \frac{2J_w \cos^2\theta}{r^2} & \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & 0 \\ \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & m + \frac{2J_w \sin^2\theta}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{J_w L^2}{2r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ -d \end{bmatrix} \lambda_1$$

Ahora se va a determinar el modelo de espacio de estados común (3.196) que incluye tanto al modelo cinemático como al dinámico en una única expresión matricial a partir de la nueva matriz cinemática  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  dada en (3.230) y las siguientes matrices:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -d\sin\theta \\ \sin\theta & d\cos\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m + \frac{2J_w \cos^2\theta}{r^2} & \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & 0 \\ \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & m + \frac{2J_w \sin^2\theta}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{J_w L^2}{2r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -d\sin\theta \\ \sin\theta & d\cos\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m + \frac{2J_w}{r^2} & 0 \\ 0 & J + md^2 + \frac{J_w L^2}{2r^2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{S}^T \mathbf{E} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & -d\sin\theta \\ \sin\theta & d\cos\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{mr^2 + 2J_w} & 0 \\ 0 & \frac{2r^2}{J_w L^2 + 2Jr^2 + 2md^2 r^2} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{L} \\ \frac{r}{2} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{r^2}{mr^2 + 2J_w} & 0 \\ 0 & \frac{2r^2}{J_w L^2 + 2Jr^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \frac{r}{mr^2 + 2J_w} & \frac{r}{mr^2 + 2J_w} \\ \frac{rL}{J_w L^2 + 2Jr^2 + 2md^2 r^2} & \frac{-rL}{J_w L^2 + 2Jr^2 + 2md^2 r^2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -d\sin\theta \\ \sin\theta & d\cos\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m + \frac{2J_w \cos^2\theta}{r^2} & \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & 0 \\ \frac{J_w \sin(2\theta)}{r^2} & m + \frac{2J_w \sin^2\theta}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{J_w L^2}{2r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\theta & -d\cos\theta \\ \cos\theta & -d\sin\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \frac{-d(mr^2 + 2J_w)}{r^2} \omega \\ dm v \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{mr^2 + 2J_w} & 0 \\ 0 & \frac{2r^2}{J_w L^2 + 2Jr^2 + 2md^2 r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-d(mr^2 + 2J_w)}{r^2} \omega \\ dm v \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} -d\omega \\ 2dmr^2v \\ \frac{J_w L^2 + 2Jr^2 + 2md^2r^2}{2dmr^2v} \end{bmatrix}$$

y según la ecuación (3.196) el sistema se puede escribir en forma de espacio de estado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ , donde el vector de estado es  $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T \ \mathbf{v}^T]^T$ , con lo cual el modelo resultante es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}\mathbf{v} \\ -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\theta - \omega d \sin\theta \\ v \sin\theta + \omega d \cos\theta \\ \omega \\ d\omega \\ -2dmr^2v \\ \frac{J_w L^2 + 2Jr^2 + 2md^2r^2}{2dmr^2v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{mr^2 + 2J_w} & \frac{r}{mr^2 + 2J_w} \\ \frac{rL}{J_w L^2 + 2Jr^2 + 2md^2r^2} & \frac{-rL}{J_w L^2 + 2Jr^2 + 2md^2r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} \quad (3.237)$$

Esta expresión matricial describe el movimiento completo del robot móvil con accionamiento diferencial cuando el centro de masa  $(x_c, y_c)$  no coincide con el centro geométrico. Si solo se desea expresar el modelo dinámico directo debería emplearse la ecuación (3.194). El modelo dinámico del robot puede ser expandido si se toma en consideración todas las masas e inercias que conforman al robot (chasis y ruedas) al emplear las relaciones dadas en (3.199) y (3.200), con  $m = m_R + 2m_w$  y  $J = J_R + 2J_{wz} + m_w L^2/2$ . No se va a realizar este reemplazo en este apartado por cuestiones de espacio.

En la práctica las masas de las ruedas son mucho más pequeñas que la masa del chasis, así que están son despreciadas incluyendo sus momentos de inercias ( $m_w = 0$ ,  $J_w = 0$ ,  $J_{wz} = 0$ ), quedando  $m = m_R$  y  $J = J_R$ . Bajo esta premisa el modelo dinámico dado en (3.237) puede ser reducido eliminando los parámetros antes mencionados, con lo cual se obtiene el siguiente modelo directo más sencillo:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\omega \\ -dm_R v \\ \frac{J_R + m_R d^2}{2dm_R v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_R r} & \frac{1}{m_R r} \\ \frac{L}{2r^2(J_R + m_R d^2)} & \frac{-L}{2r^2(J_R + m_R d^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} \quad (3.238)$$

De esta expresión se obtiene que:

$$\dot{v} = d\omega + \frac{1}{m_R r}(\tau_d + \tau_i) \quad \dot{\omega} = \frac{-dm_R}{J_R + m_R d^2}v + \frac{L}{2r^2(J_R + m_R d^2)}(\tau_d - \tau_i) \quad (3.239)$$

El modelo dinámico inverso del robot móvil con accionamiento diferencial se obtiene teniendo en cuenta la ecuación (3.195). Si no se toma en consideración las masas y los momentos de inercias de las ruedas ( $m_w = 0, J_w = 0, J_{wz} = 0$ ) quedando  $m = m_R$  y  $J = J_R$ , se obtiene el siguiente modelo dinámico inverso sencillo:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{E}}^{-1}(\tilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{V}})$$

$$\begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{L} \\ \frac{r}{2} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} m_R & 0 \\ 0 & J_R + m_R d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -dm_R \omega \\ dm_R v \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r(m_R \dot{v} - dm_R \omega)}{2} + \frac{r(dm_R v + \dot{\omega}(m_R d^2 + J_R))}{L} \\ \frac{r(m_R \dot{v} - dm_R \omega)}{2} - \frac{r(dm_R v + \dot{\omega}(m_R d^2 + J_R))}{L} \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene que

$$\tau_d = \frac{r(m_R \dot{v} - dm_R \omega)}{2} + \frac{r(dm_R v + \dot{\omega}(m_R d^2 + J_R))}{L} \quad (3.240)$$

$$\tau_i = \frac{r(m_R \dot{v} - dm_R \omega)}{2} - \frac{r(dm_R v + \dot{\omega}(m_R d^2 + J_R))}{L}$$

El modelo dinámico inverso reducido para este robot móvil con configuración diferencial en (3.240) también puede ser obtenido en función de las aceleraciones angulares de las ruedas utilizando para ello las relaciones dadas en (3.214) que también son válidas para este análisis, con lo cual se obtiene:

$$\tau_d = \left[ \frac{m_R r^2}{4} + \frac{r^2(m_R d^2 + J_R)}{L^2} \right] \ddot{\phi}_d + \left[ \frac{m_R r^2}{4} - \frac{r^2(m_R d^2 + J_R)}{L^2} \right] \ddot{\phi}_i + \frac{dm_R r^2}{L} \dot{\phi}_i$$

$$\tau_i = \left[ \frac{m_R r^2}{4} - \frac{r^2(m_R d^2 + J_R)}{L^2} \right] \ddot{\phi}_d + \left[ \frac{m_R r^2}{4} + \frac{r^2(m_R d^2 + J_R)}{L^2} \right] \ddot{\phi}_i - \frac{dm_R r^2}{L} \dot{\phi}_d \quad (3.241)$$

En la Figura 3.50 se presenta el código desarrollado en Matlab para determinar las expresiones matemáticas de la dinámica directa e inversa de este análisis alternativo del robot diferencial partiendo de las ecuaciones encontradas en esta sección.

```

%Creación de variables simbólicas
syms m J mR JR r d L v w dv dw Jw theta Td Ti dFId dFIi ddFId ddFIi
%Declaración de vectores y matrices iniciales
S=[cos(theta) -d*sin(theta);sin(theta) d*cos(theta);0 1]
E=(1/r)*[cos(theta) cos(theta);sin(theta) sin(theta);L/2 -L/2]
JW=Jw*eye(2) %matriz diagonal de inercias de las ruedas
T=[Td;Ti]; %vector de torques de las ruedas
M1=[m 0 0;0 m 0;0 0 J]

%Matrices intermedias que componen el modelo dinámico
M2=simplify(E*JW*E.')
M=simplify(M1+M2)
Mraya=simplify(S.'*M*S)
invMraya=inv(Mraya)
Eraya=simplify(S.'*E)
invEraya=inv(Eraya)
invMraya_Eraya=simplify(invMraya*Eraya)
Vel=[v;w]; % vector de velocidades del robot
Vraya=simplify(S.'*M*diff(S)*Vel)
invMraya_Vraya=simplify(invMraya*Vraya)

%Modelo dinámico directo e inverso completo
dvfinal=simplify(-invMraya*Vraya+(invMraya*Eraya)*T)
dVel=[dv;dw]; % vector de aceleraciones del robot
u=simplify(invEraya*(Mraya*dVel+Vraya))

%Modelo dinámico directo e inverso simplificado
Jw=0; m=mR; J=JR; %Inercias y masas de las ruedas despreciables
dvfinalsimple=simplify(eval(dvfinal)) %dinámica directa simple
usimple=simplify(eval(u)) %dinámica inversa simple

%Modelo dinámico inverso en función de las velocidades y aceleraciones de
las ruedas
v=(r/2)*(dFId+dFIi);
w=(r/L)*(dFId-dFIi);
dv=(r/2)*(ddFId+ddFIi);
dw=(r/L)*(ddFId-ddFIi);
usimple_ruedas=simplify(expand(eval(usimple)))

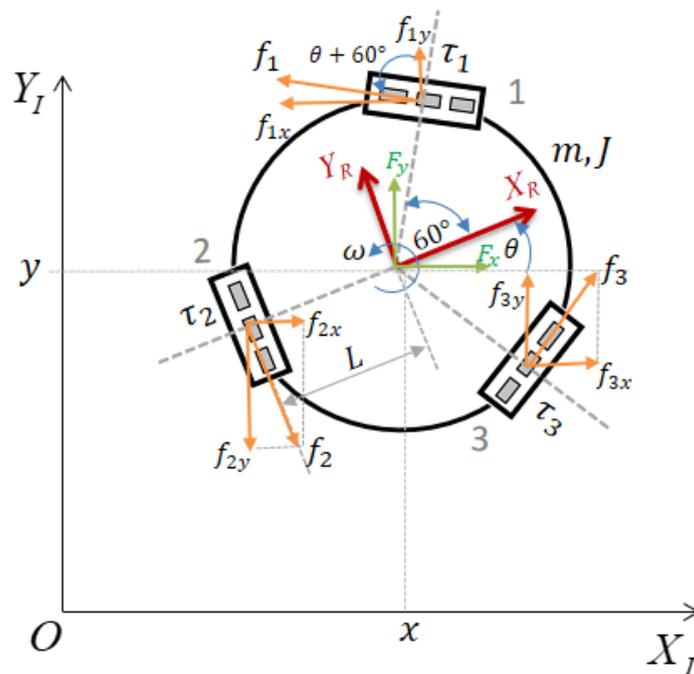
```

**Figura 3.50.** Código en Matlab para determinar el modelo dinámico alternativo de un robot diferencial.

### 3.6.7 Modelo Dinámico del Robot Omnidireccional de Tres Ruedas

Aquí, derivaremos el modelo dinámico de un robot omnidireccional de tres ruedas utilizando el método de Euler-Lagrange. El modelado cinemático de este robot móvil con ruedas ya ha sido analizado en apartados anteriores, por lo cual cierta información matricial determinada en esos apartados será empleada también en el modelado dinámico.

En la Figura 3.51 se muestra una vista superior de la configuración del robot considerado en este apartado, donde es posible ver el sistema de referencia móvil  $\{X_R, Y_R\}$  ubicado en el centro de masa del vehículo con el eje  $X_R$  colineal al eje  $Y_w$  de la rueda 2. Las tres ruedas están colocadas en ángulos de  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\alpha_2 = 180^\circ$  y  $\alpha_3 = -60^\circ$ , respectivamente, medidos desde el eje positivo  $X_R$ . De la misma forma, se muestra el sistema de referencia fijo  $\{X_I, Y_I\}$  que proporciona la localización absoluta (global) del vehículo en el espacio de trabajo.



**Figura 3.51.** Geometría de un robot móvil omnidireccional con 3 ruedas universales.

El movimiento del robot quedará descrito mediante el vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$  y su vector de entrada  $\mathbf{u} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$  está compuesto por el torque de las tres ruedas omnidireccionales tipo universal. Además,  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  representan las fuerzas de tracción generadas por cada rueda motriz, las cuales se originan por la transferencia de torque desde los

ejes de los motores acoplados a cada rueda hacia la superficie de transmisión. Las fuerzas  $F_x$  y  $F_y$  son las componentes de fuerza de tracción aplicadas al centro geométrico (centro de masa) del robot omnidireccional.

En el análisis realizado en la sección 3.2.9 se obtuvo una representación general del modelo cinemático de configuración del robot móvil con accionamiento diferencial en la forma matricial  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}(t)$  considerando que  $v_1 = {}^R\dot{x} = v_x$ ,  $v_2 = {}^R\dot{y} = v_y$  y  $v_3 = \omega$  son las entradas de control, donde  $v_x$  y  $v_y$  corresponden a las componentes de la velocidad lineal y  $\omega$  es la velocidad angular del robot respecto a su propio sistema de referencia local.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}(\mathbf{q}) = {}^I\mathbf{R}_R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.242)$$

Donde

$$\begin{aligned} {}^R\dot{x} = v_x &= \frac{r\sqrt{3}}{3}(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_3) & {}^R\dot{y} = v_y &= \frac{r}{3}(-\dot{\phi}_1 + 2\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3) \\ \dot{\theta} = \omega &= -\frac{r}{3L}(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3) \end{aligned} \quad (3.243)$$

Para iniciar el análisis dinámico del robot omnidireccional se va emplear directamente la expresión matricial obtenida en (3.206) que es válida para cualquier robot móvil con ruedas, con la finalidad de disminuir los pasos de la formulación formal de Euler-Lagrange y no tener la necesidad de determinar la matriz de restricciones  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ .

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_T \end{bmatrix} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.244)$$

A partir de la Figura 3.51 se puede deducir las siguientes formulaciones:

$$F_x = f_{1x} + f_{2x} + f_{3x} = f_1 \sin(\theta + \alpha_1) + f_2 \sin(\theta + \alpha_2) + f_3 \sin(\theta + \alpha_3)$$

$$F_x = f_1 \sin(\theta + 60^\circ) + f_2 \sin(\theta + 180^\circ) + f_3 \sin(\theta - 60^\circ)$$

$$F_x = f_1 \sin(\theta + \pi/3) - f_2 \sin(\theta) + f_3 \sin(\theta - \pi/3)$$

$$F_y = -f_{1y} - f_{2y} - f_{3y} = f_1 \cos(\theta + \alpha_1) + f_2 \cos(\theta + \alpha_2) + f_3 \cos(\theta + \alpha_3)$$

$$F_y = -f_1 \cos(\theta + 60^\circ) - f_2 \cos(\theta + 180^\circ) - f_3 \cos(\theta - 60^\circ)$$

$$F_y = -f_1 \cos(\theta + \pi/3) + f_2 \cos(\theta) - f_3 \cos(\theta - \pi/3)$$

$$M_T = M_1 + M_2 + M_3 = Lf_1 \sin(-90^\circ) + Lf_2 \sin(-90^\circ) + Lf_3 \sin(-90^\circ)$$

$$M_T = -Lf_1 - Lf_2 - Lf_3$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (3.244) en forma matricial, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = r \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \pi/3) & -\sin(\theta) & \sin(\theta - \pi/3) \\ -\cos(\theta + \pi/3) & \cos(\theta) & -\cos(\theta - \pi/3) \\ -L & -L & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.245)$$

Donde las matrices están dadas por

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(\mathbf{q}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \pi/3) & -\sin(\theta) & \sin(\theta - \pi/3) \\ -\cos(\theta + \pi/3) & \cos(\theta) & -\cos(\theta - \pi/3) \\ -L & -L & -L \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

A partir de estas matrices y con la ecuación (3.211) se puede determinar  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  como

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_1(\mathbf{q}) + \mathbf{E}(\mathbf{q})J_w\mathbf{I}\mathbf{E}(\mathbf{q})^T$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \frac{3J_w}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3J_w}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3J_w L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m + \frac{3J_w}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & m + \frac{3J_w}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{3J_w L^2}{r^2} \end{bmatrix}$$

Con las matrices obtenidas hasta el momento se puede expresar el modelo dinámico completo del robot móvil diferencial según la expresión  $\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$  dada en (3.210):

$$\begin{bmatrix} m + \frac{3J_w}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & m + \frac{3J_w}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{3J_w L^2}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \pi/3) & -\sin(\theta) & \sin(\theta - \pi/3) \\ -\cos(\theta + \pi/3) & \cos(\theta) & -\cos(\theta - \pi/3) \\ -L & -L & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$$

Ahora se va a determinar el modelo de espacio de estados común (3.196) que incluye tanto al modelo cinemático como al dinámico en una única expresión matricial a partir de las siguientes matrices

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m + \frac{3J_w}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & m + \frac{3J_w}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{3J_w L^2}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m + \frac{3J_w}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & m + \frac{3J_w}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{3J_w L^2}{r^2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2r^2}{2mr^2 + 3J_w} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2r^2}{2mr^2 + 3J_w} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{3J_w L^2 + Jr^2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{S}^T \mathbf{E} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sin(\theta + \pi/3) & -\sin(\theta) & \sin(\theta - \pi/3) \\ -\cos(\theta + \pi/3) & \cos(\theta) & -\cos(\theta - \pi/3) \\ -L & -L & -L \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -L & -L & -L \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{E}}^{-1} = \frac{r}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{L} \\ -\sqrt{3} & -1 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{2r^2}{2mr^2 + 3J_w} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2r^2}{2mr^2 + 3J_w} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{3J_w L^2 + Jr^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -L & -L & -L \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}r}{2mr^2 + 3J_w} & 0 & \frac{-\sqrt{3}r}{2mr^2 + 3J_w} \\ -r & 2r & -r \\ \frac{-rL}{3J_w L^2 + Jr^2} & \frac{-rL}{3J_w L^2 + Jr^2} & \frac{-rL}{3J_w L^2 + Jr^2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{S}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m + \frac{3J_w}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & m + \frac{3J_w}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & J + \frac{3J_w L^2}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} -\frac{2mr^2 + 3J_w}{2r^2}v_y \\ \frac{2mr^2 + 3J_w}{2r^2}v_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \frac{2r^2}{2mr^2 + 3J_w} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2r^2}{2mr^2 + 3J_w} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{3J_wL^2 + Jr^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2mr^2 + 3J_w}{2r^2}v_y \\ \frac{2mr^2 + 3J_w}{2r^2}v_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_y \\ v_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

y según la ecuación (3.196) el sistema se puede escribir en forma de espacio de estado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ , donde el vector de estado es  $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T \quad \mathbf{v}^T]^T$ , con lo cual el modelo resultante es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}\mathbf{v} \\ -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cos\theta - v_y \sin\theta \\ v_x \sin\theta + v_y \cos\theta \\ \omega \\ v_y \\ -v_x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}r}{2mr^2 + 3J_w} & 0 & \frac{-\sqrt{3}r}{2mr^2 + 3J_w} \\ -r & 2r & -r \\ \frac{2mr^2 + 3J_w}{3J_wL^2 + Jr^2} & \frac{2mr^2 + 3J_w}{3J_wL^2 + Jr^2} & \frac{2mr^2 + 3J_w}{3J_wL^2 + Jr^2} \\ -rL & -rL & -rL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (3.246)$$

El modelo dinámico del robot puede ser expandido si se toma en consideración todas las masas e inercias que conforman al robot (chasis y ruedas) al emplear las relaciones dadas en (3.199) y (3.200), con  $m = m_R + 3m_w$  y  $J = J_R + 3J_{wz} + 3m_wL^2$ . No se va a realizar este reemplazo en este apartado por cuestiones de espacio.

En la práctica las masas de las ruedas son mucho más pequeñas que la masa del chasis, así que están son despreciadas incluyendo sus momentos de inercias ( $m_w = 0$ ,  $J_w = 0$ ,  $J_{wz} = 0$ ), quedando  $m = m_R$  y  $J = J_R$ . Bajo esta premisa el modelo dinámico dado en (3.246) puede ser reducido eliminando los parámetros antes mencionados, con lo cual se obtiene el siguiente modelo directo más sencillo:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2m_R r} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2m_R r} \\ \frac{-1}{2m_R r} & \frac{2}{2m_R r} & \frac{-1}{2m_R r} \\ \frac{-L}{J_R r} & \frac{-L}{J_R r} & \frac{-L}{J_R r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (3.247)$$

De esta expresión se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= v_y + \frac{\sqrt{3}}{2m_R r} (\tau_1 - \tau_3) & \dot{v}_y &= -v_x + \frac{1}{2m_R r} (-\tau_1 + 2\tau_2 - \tau_3) \\ \dot{\omega} &= \frac{-L}{J_R r} (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \end{aligned} \quad (3.248)$$

El modelo dinámico inverso del robot móvil omnidireccional se obtiene teniendo en cuenta la ecuación (3.195). Si no se toma en consideración las masas y los momentos de inercias de las ruedas ( $m_w = 0, J_w = 0, J_{wz} = 0$ ) quedando  $m = m_R$  y  $J = J_R$ , se obtiene el siguiente modelo dinámico inverso sencillo:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{E}}^{-1}(\tilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{V}})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} &= \frac{r}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{L} \\ -\sqrt{3} & -1 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 \\ 0 & 0 & J_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_R v_y \\ m_R v_x \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}r(m_R \dot{v}_x - m_R v_y)}{3} - \frac{r(m_R v_x + m_R \dot{v}_y)}{3} - \frac{J_R r \dot{\omega}}{3L} \\ \frac{2r(m_R v_x + m_R \dot{v}_y)}{3} - \frac{J_R r \dot{\omega}}{3L} \\ -\frac{\sqrt{3}r(m_R \dot{v}_x - m_R v_y)}{3} - \frac{r(m_R v_x + m_R \dot{v}_y)}{3} - \frac{J_R r \dot{\omega}}{3L} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De donde se obtiene que

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{3}r(m_R \dot{v}_x - m_R v_y)}{3} - \frac{r(m_R v_x + m_R \dot{v}_y)}{3} - \frac{J_R r \dot{\omega}}{3L} \quad (3.249)$$

$$\tau_2 = \frac{2r(m_R v_x + m_R \dot{v}_y)}{3} - \frac{J_R r \dot{\omega}}{3L}$$

$$\tau_3 = -\frac{\sqrt{3}r(m_R \dot{v}_x - m_R v_y)}{3} - \frac{r(m_R v_x + m_R \dot{v}_y)}{3} - \frac{J_R r \dot{\omega}}{3L}$$

El modelo dinámico inverso reducido para este robot móvil omnidireccional dado en (3.249) también puede ser obtenido en función de las aceleraciones angulares de las ruedas utilizando para ello las relaciones dadas en (3.243), con lo cual se obtiene:

$$\tau_1 = -\frac{r^2}{9} [(J_R - 4m_R)\ddot{\phi}_1 + (J_R + 2m_R)\ddot{\phi}_2 + (J_R + 2m_R)\ddot{\phi}_3 + 2\sqrt{3}m_R\dot{\phi}_2 - 2\sqrt{3}m_R\dot{\phi}_3]$$

$$\tau_2 = -\frac{r^2}{9} [(J_R + 2m_R)\ddot{\phi}_1 + (J_R - 4m_R)\ddot{\phi}_2 + (J_R + 2m_R)\ddot{\phi}_3 - 2\sqrt{3}m_R\dot{\phi}_1 + 2\sqrt{3}m_R\dot{\phi}_3]$$

$$\tau_3 = -\frac{r^2}{9} [(J_R + 2m_R)\ddot{\phi}_1 + (J_R + 2m_R)\ddot{\phi}_2 + (J_R - 4m_R)\ddot{\phi}_3 + \sqrt{3}m_R\dot{\phi}_1 - 2\sqrt{3}m_R\dot{\phi}_2]$$

Como ya se indicó cuando se analizó el modelado dinámico del robot diferencial, la matriz  $\mathbf{E}(\mathbf{q})$  también puede obtenerse a partir de la expresión dada en (3.212) siempre y cuando se hubiese determinado previamente el modelo cinemático del robot (sección 3.2.9), así entonces se tiene que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}) = ({}^R\mathbf{R}_I)^T (\mathbf{J}^{-1})^T = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \\ 0 & 1 & -L \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \pi/3) & -\sin(\theta) & \sin(\theta - \pi/3) \\ -\cos(\theta + \pi/3) & \cos(\theta) & -\cos(\theta - \pi/3) \\ -L & -L & -L \end{bmatrix}$$

En la Figura 3.52 se presenta el código desarrollado en Matlab para determinar las expresiones matemáticas de la dinámica directa e inversa del robot móvil omnidireccional de tres ruedas partiendo de las ecuaciones encontradas en esta sección.

```

%Creación de variables simbólicas
syms m J mR JR r L vx vy w dvx dvy dw Jw theta T1 T2 T3...
    dfi1 dfi2 dfi3 ddfil ddfi2 ddfi3

%Declaración de vectores y matrices iniciales
S=[cos(theta) -sin(theta) 0;sin(theta) cos(theta) 0;0 0 1]
invJ=(1/r)*[sqrt(3)/2 -1/2 -L; 0 1 -L; -sqrt(3)/2 -1/2 -L];
rRi=[cos(theta) sin(theta) 0;-sin(theta) cos(theta) 0;0 0 1];
E=(simplify(invJ*rRi)).'
JW=Jw*eye(3) %matriz diagonal de inercias de las ruedas
T=[T1;T2;T3]; %vector de torques de las ruedas
M1=[m 0 0;0 m 0;0 0 J]

%Matrices intermedias que componen el modelo dinámico
M2=simplify(E*JW*E.')
M=simplify(M1+M2)
Mraya=simplify(S.*M*S)
invMraya=inv(Mraya)
Eraya=simplify(S.*E)
invEraya=inv(Eraya)
invMraya_Eraya=simplify(invMraya*Eraya)
v=[vx;vy;w]; % vector de velocidades del robot
Vraya=simplify(S.*M*diff(S)*v)
invMraya_Vraya=simplify(invMraya*Vraya)

%Modelo dinámico directo e inverso completo
dvfinal=simplify(-invMraya*Vraya+(invMraya*Eraya)*T)
dv=[dvx;dvy;dw]; % vector de aceleraciones del robot
u=simplify(invEraya*(Mraya*dv+Vraya))

%Modelo dinámico directo e inverso simplificado
Jw=0; m=mR; J=JR; %Inerccias y masas de las ruedas despreciables
dvfinalsimple=simplify(eval(dvfinal)) %dinámica directa simple
usimple=simplify(eval(u)) %dinámica inversa simple

%Modelo dinámico inverso en funcion de las velocidades y aceleraciones de
las ruedas
vx=(r*sqrt(3)/3)*(dfi1-dfi3);
vy=(r/3)*(-dfi1+2*dfi2-dfi3);
w=(r/3*L)*(dfi1+dfi2+dfi3);
dvx=(r*sqrt(3)/3)*(ddf11-ddfi3);
dvy=(r/3)*(-ddf11+2*ddf12-ddfi3);
dw=(r/3*L)*(ddf11+ddf12+ddf13);
usimple_ruedas=simplify(expand(eval(usimple)))

```

**Figura 3.52.** Código en Matlab para determinar el modelo dinámico del robot móvil omnidireccional.

## Referencias

- [18] R. Siegwart, R.I. Nourbakhsh, and D. Scaramuzza. *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. MIT Press, London, England, 2011.
- [19] B. Siciliano, and O. Khatib, eds. *Springer Handbook of Robotics*. Springer, Berlin, 2016.
- [20] L. Gracia, and J.Tornero. *Modelado Cinemático y Control de Robots Móviles con Ruedas*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, España, 2006.
- [21] G. Klančar, A. Zdešar, S. Blažic, and I. Škrjanc. *Wheeled Mobile Robotics: From Fundamentals Towards Autonomous Systems*. Butterworth-Heinemann Elsevier, Ljubljana, Slovenia, 2017.
- [22] SG. Tzafestas. *Introduction to Mobile Robot Control*. Elsevier, Athens, Greece, 2014.
- [23] G. Dudek, and M. Jenkin. *Computational Principles of Mobile Robotics*, Cambridge University Press, New York, 2010.
- [24] G. Cook. *Mobile Robots: Navigation, Control and Remote Sensing*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011.
- [25] A. Ollero. *Robótica: Manipuladores y Robots Móviles*. Marcombo, Barcelona, España, 2009.
- [26] J. Salido. *Cibernética Aplicada Robots Educativos*. Alfaomega Grupo Editor, México, 2010.
- [27] K.M. Lynch, and F.C. Park. *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, Massachusetts, USA, 2017.
- [28] Y. Li, S. Dai, L. Zhao, X. Yan, and Y. Shi. *Topological Design Methods for Mecanum Wheel Configurations of an Omnidirectional Mobile Robot*. Symmetry, Basel, Switzerland, 2019.
- [29] Y. Li, S. Ge, S. Dai, L. Zhao, X. Yan, Y. Zheng and Y. Shi. *Kinematic Modeling of a Combined System of Multiple Mecanum-Wheeled Robots with Velocity Compensation*. Symmetry, Basel, Switzerland, 2019.
- [30] S. Martínez, and R. Sisto. *Control y Comportamiento de Robots Omnidireccionales*. Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, 2009.
- [31] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer, London, 2010.
- [32] M. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*, Jon Wiley & Sons, New Delhi, India, 2020.

- [33] R. Miranda. *Cinemática y Dinámica de Robots Manipuladores*. Alfaomega, México, 2016.
- [34] Appin Knowledge Solutions. *ROBOTICS*. Infinity Science Press, Austin, Texas ,2007.
- [35] J. A. Vázquez, and M. Velasco-Villa. Path-Tracking Dynamic Model Based Control of an Omnidirectional Mobile Robot. *The International Federation of Automatic Control*, Seoul, Korea: 5365-5370, 2008.
- [36] J. Ortiz, and M. Olivares. Trajectory Tracking Control of an Omnidirectional Mobile Robot Based on MPC. *Department of Electronics, Technical University Federico Santa María*. Valparaíso, Chile, 2007.
- [37] C. Ren, and S. Ma. Dynamic Modeling and Analysis of an Omnidirectional Mobile Robot. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Tokyo, Japan: 4860-4865, 2013.
- [38] H. Rodríguez-Cortés, M. Velasco-Villa, and E. Aranda-Bricaire. Observer based Trajectory-Tracking Control of an Omnidirectional Mobile Robot. *CINVESTAV-IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, México*, 2009.
- [39] L. Xin, Y. Wang, and H. Fu. Omnidirectional Mobile Robot Dynamic Model Identification by NARX Neural Network and Stability Analysis Using the APLF Method. *Symmetry*, 2020.
- [40] van Haendel, R. P. A. (2005). *Design of an omnidirectional universal mobile platform*. (DCT rapporten; Vol. 2005.117). Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.
- [41] P. Rodríguez. *Modelado y simulación del robot omnidireccional de 4 ruedas suecas a 90 grados*. Universidad de Costa Rica, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Costa Rica, 2016.
- [42] Oliveira, H., Sousa, A., Moreira, A., y Costa, P. Modeling and Assessing of Omnidirectional Robots with Three and Four Wheels. *Contemporary Robotics - Challenges and Solutions*, Capítulo 12, 2009.
- [43] Conceicao, A., y Correia, M. Modeling of a Three Wheeled Omnidirectional Robot Including Friction Models. *10th IFAC Symposium on Robot Control International Federation of Automatic Control*, Dubrovnik, Croatia: 7-12, 2012.



ISBN: 978-9942-7078-3-3



9 | 7 8 9 9 4 2 | 7 0 7 8 3 3